

या. इ. पेरुलमान



सरस गणित

Я. И. Перельман

ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука», Москва

या. इ. पेरैलमान
सरस गणित



“मीर”
प्रकाशन-ग्रह
मास्को
सोवियत संघ

अनुवादक : देवेन्द्र प्र० वर्मा

पुस्तक-परिचय

वा० इ० पेरेलमान लिखित मनोरंजक गणित-प्रश्नों की पुस्तक-माना की यह सर्व-मुलम पुस्तकों में से एक है। इसमें गणित की नाना पहलियाँ संकलित हैं, जिनमें से कइयों को छोटी कहानियों की तरह पढ़ा जा सकता है। इनके हल के लिए अंकगणित तथा रेखागणित का सरलतम ज्ञान पर्याप्त रहेगा। सिर्फ कुछेक प्रश्नों के लिये सरल समीकरणों की रचना थीर उन्हें हल करने के ज्ञान की आवश्यकता पड़ेगी।

पुस्तक माध्यमिक कक्षाओं के छात्रों के लिये है, पर सार्वक व त्रिविकसंगत मनोरंजन के लिये दूसरे लोग भी विश्राम के क्षणों में इसका उपयोग कर सकते हैं।

पाठकों से

“मीर” प्रकाशन इस पुस्तक के अनुवाद और डिजाइन संबंधी आपके विचारों के लिये आपका अनुगृहीत होगा। आपके अन्य सुझाव प्राप्त करके भी हमें बड़ी प्रसन्नता होगी। कृपया हमें इस पते पर लिखिये :

“मीर” प्रकाशन

पेची रोस्की पेरेऊलोक, 2

मास्को, सोवियत संघ

На языке хинди

© हिन्दी अनुवाद, “मीर” प्रकाशन-गृह 1982

विषय-सूची

अध्याय 1. नाशते पर पहेलियाँ	11
1. मैदान में गिलहरी	11
2. सासे की रसोई	14
3. स्कूली अध्ययन-मंडलियों का कार्य	14
4. कौन अधिक गिना ?	15
5. दादा-पोता	16
6. रेल-टिकटें	16
7. हेलीकाप्टर की उड़ान	16
8. छाया	17
9. तीलियों का प्रश्न	18
10. घोखेबाज टूठ	18
11. दिसंबर की समस्या	20
12. अंकगणित का जादू	20
1-12 पहेलियों के हल	22
13. कटा हुआ घंक	30
14. बिना कुछ पूछे संख्या भांपना	32
15. किसने क्या लिया ?	33
अध्याय 2. लेनों का गणित	37
डोमिनो	37
16.28 गोठियों की लड़ी	37
17. लड़ी का आरंभ और अंत	37
18. डोमिनो का जादू	37

	38
19. फ़ेम	39
20. सात वर्ग	39
21. होमिनो से बने जादूई वर्ग	40
22. होमिनो निर्मित श्रेणी	40
15 का खेल या टेकेन	46
23. लायड का पहला प्रश्न	46
24. लायड का दूसरा प्रश्न	46
25. लायड का तीसरा प्रश्न	47
कोफ़ेट	47
26. गोल पार करें या कोफ़िंग करें	47
27. वेद और खंभा	47
28. गोल पार करें या खंटा पड़े ?	47
29. चूहेदानी पार करें या कोफ़िंग करें ?	47
30. दुर्गम चूहेदानी	47
16-30 पहेलियों के हल	47

अध्याय 3. दर्शन भर और पहेलियाँ 56

31. डोरी	56
32. मुराबे और इस्ताने	57
33. बालों का जीवन-काल	57
34. तनश्वाह	57
35. स्कीईंग	57
36. दो मजदूर	57
37. रिपोर्ट टाइप करना	57
38. दाँतदार चक्के	58
39. कितनी उम्र ?	58
40. इवानोव परिवार	59
41. फोन तैयार करना	59
42. खरीददारी	59
31-42 पहेलियों के हल	59

अध्याय 4. आपको गिनना आता है?	66
43. आपको गिनना आता है?	66
44. जंगल में पेड़ गिनने की क्या जरूरत है?	70
अध्याय 5. अंकों की पहलियाँ	71
45. पाँच खबल में सौ खबल	71
46. हजार	72
47. चौबीस	72
48. तीस	72
49. गुप्त अंक	72
50. कौनसी संख्याएँ	72
51. क्या भाज्य है?	72
52. 11 से भाग	73
53. अजीब गुणन	73
54. संख्याओं का त्रिकोण	73
55. संख्याओं का एक घीर त्रिकोण	73
56. जादुई सितारा	73
45-56 पहलियों के हल	74
अध्याय 6. गुप्त लिपि में पत्र-व्यवहार	80
57. जाली	80
58. जाली को याद कैसे रखें?	86
अध्याय 7. वैश्व-संख्याएँ	90
59. मुनाफे का सीधा	90
60. शहर में अफनाह	96
61. सस्ती सामग्रियों का हिमपात	100

62. इनाम	103
63. शतरंज के बारे में एक किंवदन्ती	108
64. दूत-प्रजनन	113
65. मूल का चाना	118
66. सिक्कों की हेरा-फेरी	123
67. बाजी	128
68. दैत्य-संघर्ष	132

अध्याय 8. बिना स्कोल के 137

69. कदमों में राह नाप	137
70. सजीव मान-दंड	139
71. सिक्कों की मदद से . नाप-जोख	140

अध्याय 9. ज्यामिति की पहचानियाँ 143

72. धोड़ा-गाड़ी	143
73. विशालक वीक्ष . में	143
74. स्पर्ट-लेवेल	143
75. फलकों की संख्या	144
76. अर्द्धचंद्र	145
77. 12 तीलियों से	145
78. 8 तीलियों से	145
79. मक्खी का पथ	146
80. डाट की खोज	146
81. दूसरी डाट	147
82. तीसरी डाट	147
83. 5 कोरेक पार कराना	147
84. मीतार की ऊंचाई	147
85. समरूप धाकृतियाँ	147
86. तार की छाया	147

87. ईट	147
88. ईश्वर और बीना	148
89. दो तरबूज	148
90. दो खरबूजे	148
91. बैर	148
92. पेरिस की मीनार का प्रतिमान	148
93. दो पत्तिले	149
94. ठंड में	149
72-94 पहेलियों के उत्तर	149

अध्याय 10. बारिश और हिमपात की ज्यामिति 161

95. दृष्टिमापी	161
96. कितना पानी?	163
97. कितना हिम?	165

अध्याय 11. गणित और "प्रलय-पुराण" 169

98. प्रलय-कथा	169
99. बाढ़ संभव थी या नहीं?	170
100. क्या नूह की नौका संभव है?	171

अध्याय 12. तीस मिले-जुले प्रश्न 174

101. जंजीर	174
102. मकड़े और मृगरे	174
103. टोप, बरसाती और जुते	174
104. मुर्गी और अक्षय के अंडे	175
105. उड़ान	175
106. पैंतों का उपहार	175
107. दो गोटियाँ	175

108. दो घंकों से	175
109. इकाई	175
110. बीच नहनों से	176
111. सभी दस घंकों से	176
112. चार तरीकों से	176
113. चार इकाइयों से	176
114. रहस्यमय विभाजन	176
115. एक घोर विभाजन	176
116. कितना लंबा?	177
117. ऐसा ही एक घोर प्रश्न	177
118. हवाई जहाज	177
119. एक मिलियन वस्तुएं	177
120. राहों की संख्या	177
121. घड़ी का डायल	178
122. घण्टकोण मिलाना	178
123. संख्या-बक	178
124. तिपाई	178
125. कोणों की मात्राएँ	179
126. भूमध्यरेखा पर	179
127. छे कतारों में	179
128. बीस घोर घड़चंड	179
129. घन घोर काट	179
130. एक घोर कटान	180
101-130 तहेलियों के उत्तर	181

अध्याय 1

नास्ते पर पहेलियाँ

1. मैदान में गिलहरी.—घाब सुबह में एक गिलहरी के साथ प्रायः मित्राणी खेल रहा था,— विद्याम-गृह में नास्ते पर बैठे लोगों में से किसी ने कहना शुरू किया।—पास के जंगल में घापने एक गोल खुली जगह देखी होगी, जिसके बीचों-बीच एक पेड़ खड़ा है। गिलहरी इसी पेड़ के पीछे छिपी थी। मैदान में घाते ही मैंने तने की घोट से घापनी घोर झोकती गिलहरी को घाँसे देखी। उसे पूरी तरह देखने के लिए मैं सावधानीपूर्वक मैदान की दूसरी घोर चलने लगा। पर उसकी नाक के सिवा मैं कुछ भी नहीं देख पाया। वह चालाक पहले की तरह ही मुझसे छिपी पेड़ के तने पर खिसक जाया करती थी। मैं चार बार पेड़ की परिक्रमा कर गया पर गिलहरी के चारों ओर नहीं घूम सका।

—लेकिन,—किसी ने घापती उठायी,—घाप खुद कह रहे हैं कि चार बार पेड़ का चक्कर लगा घापे।

—पेड़ का, गिलहरी का नहीं!

—लेकिन गिलहरी तो पेड़ पर ही थी?

—इससे क्या होता है?

—यही कि घाप गिलहरी का भी चक्कर लगा घापे।

—यह भी खूब चक्कर लगाना हुआ, यदि एक बार भी उसकी पीठ नहीं दिखी।

—पीठ का प्रश्न ही नहीं है। गिलहरी केंद्र में है और घाप वृत्त की परिधि पर घूम रहे हैं। अर्थात् घाप गिलहरी का चक्कर लगा रहे हैं।

- किन्तु नहीं। मान लें कि मैं घाप के चारों घोर चक्कर लगा रहा हूँ। घाप ही बतावें, क्या मैं घापका चक्कर लगा रहा हूँ? - बेशक। घोर नहीं तो क्या?

- घापका चक्कर लगा रहा हूँ, हालाँकि घापकी पीठ नहीं देख सकता?

- घाप पीठ के चक्कर में क्यों पड़े हैं? सार तो इसमें है कि घाप मेरे चारों घोर घूम कर पुरानी जगह लौट आते हैं। पीठ देखना घापक नहीं है।

- देखिये: किसी चीज का चक्कर लगाने का क्या अर्थ है? मेरे खयाल में इसका सिर्फ एक अर्थ हो सकता है: एक जगह से उन जगहों पर घा कर बचना कि उस चीज को कमजोर हर पार्श्व से देखा जा सके। मैं नहीं हूँ न, प्रोफेसर साहब? - बहस करने वाले ने पास बैठे बूढ़ से पूछा।

- भारत: घाप शब्दों पर तर्क कर रहे हैं, - प्रोफेसर ने कहा। - ऐसी स्थितियों में बात उससे शुरू करनी चाहिये, जिससे निकली थी। पहले शब्दों के अर्थ तय कर लेने चाहिये। "किसी चीज का चक्कर लगाना" - इन शब्दों का क्या अर्थ है? इनके दो अर्थ हो सकते हैं। प्रथमतः वह समझा जा सकता है कि घाप एक बंद (संवृत) बक्क पर घूम रहे हैं, जिसके भीतर वह चीज स्थित है। यह एक अर्थ हुआ। दूसरे: उस चीज के चारों तरफ इस तरह घूमना कि उसका हर पार्श्व देखा जा सके। यदि पहले अर्थ का अनुसरण किया जाये, तो आपकी मानना पड़ेगा कि घाप गिलहरी के चार चक्कर लगा चुके हैं। दूसरे अर्थ के अनुसार घापने गिलहरी का एक भी चक्कर नहीं लगाया। जैसा घाप देखते हैं, यदि दोनों पक्ष एक भाषा में बोलें और शब्दों को एक ही अर्थ में प्रयुक्त करें, तो यहाँ तर्क का कोई प्रश्न नहीं उठता।

- और, माना कि दो अर्थ हो सकते हैं। लेकिन कौन-सा अर्थ अधिक सही है?

- इस तरह प्रश्न रखने की जरूरत नहीं है। आप कोई भी अर्थ सही मान सकते हैं। सिर्फ यह पूछना युक्तिसंगत होगा कि कौन-सा अर्थ सर्वमान्य है। मैं कहूँगा कि पहला अर्थ भाषा की आत्मा के अधिक



चित्र 1. "वह चालाक हर बार तने की दूसरी तरफ खिसक जाया करती थी"।

निकट है। आपको ज्ञात है कि सूरज 25 दिनों से कुछ अधिक समय में अपनी धुरी पर एक बार घूम जाता है।

—सूरज धुरी पर घूमता है?

—बेशक, वैसे ही जैसे पृथ्वी अपनी धुरी पर। लेकिन कल्पना कीजिये कि सूरज का यह घूर्णन काफी धीमा है—वह 25 दिनों में नहीं, बल्कि $365\frac{1}{4}$ दिनों, अर्थात् एक साल में एक पूरा चक्कर लगाता है। तब हमें सूरज का सिर्फ एक पृष्ठ दिखता; विपरीत भ्रम, सूरज की पीठ कभी नहीं देख पाते। लेकिन क्या इससे कोई कहता कि पृथ्वी सूरज के चारों ओर नहीं घूमती?

—हाँ, अब स्पष्ट है कि मैं गिलहरी के चारों ओर घूम रहा था।

—एक प्रस्ताव है, साधियों! यहाँ से हम लोग जाये नहीं। बारिश में कोई घूमने नहीं जायेगा और वह रुकने वाली नहीं लगती, — बिबाद सुनने वालों में से एक ने कहा।—आइये, आज पहलियों में समय व्यतीत किया जाये। नुक़्सात हो चुकी है। हर आदमी बारी-बारी से कोई पहली याद कर या सोच कर सुनाये। प्रोफ़ेसर साहेब हमारे निर्णायक रहेंगे।

—यदि पहलियाँ बीजगणित अथवा रेखागणित की होंगी, तो मुझे इन्कार कर देना चाहिये— एक पृथ्वी ने ऐलान किया।

-घोर मुझे भी! -किसी ने उसका साथ दिया।
-नहीं, नहीं, सभी को भाग लेना होगा। हम उपस्थित लोगों से
धनुरोध करेंगे कि अपनी पहलियों में बीजगणित या रेखागणित का
उपयोग नहीं करें; सिर्फ उनकी शुरुआत का किया जा सकता है।
किसी को आपसी है?

-उब मैं सहमत हूँ और पहली पहली सुनाने के लिये तैयार हूँ।

-बहुत अच्छा, शुरू करें! -सब घोर से आवाजें आयीं।

2. साझे की रसोई.-मेरी पहली का जन्म परिनगर की एक
विधाम-कुटी में हुआ था। समस्या, कहना चाहिये, धरेलू है। एक औरत
ने, सहायित के लिये उसे जिलकड़ा करे, साझे के चूल्हे में लकड़ी
के तीन कुदे दाने घोर दूसरी, पंचलकड़ा ने-पाँच। तीसरे बादमी,
बिनलकड़ा ने (आप समझ गये होंगे, उसके पास लकड़ी नहीं थी!)
दोनों औरतों की सहमती से खाना बनाने में साझे के चूल्हे का उपयोग
किया। इसके बदले उसने पड़ोसियों को घाठ कोपेक दिये। कैसे वे इस
राम की आपस में बंटिगी?

-आधा-आधा, -किसी ने उत्तर देने में जल्दीबाजी की। -बिन-
लकड़ा ने घाग का इस्तेमाल बराबर रूप से किया था।

-नहीं, -दूसरे ने आपसी की, -घाग बनाने में दोनों औरतों
की लकड़ियों के हिस्से को ध्यान में रखना चाहिये। जिसने तीन कुदे
दिये, उसे तीन कोपेक घोर जिसने पाँच कुदे दिये, उसे पाँच कोपेक
मिलने चाहिये। यह सही बंटबारा होगा।

-निर्वा, -उस बादमी ने टीका, जिसने खेल का प्रस्ताव रखा
था और अब इस सभा का अध्यक्ष माना जा रहा था, -पहेलियों का
हम अभी नहीं बतायें। हरेक को सोचने का अवसर देते हैं। सही
उत्तर का निर्णय जब महोदय घाग के खाने पर करेंगे। अब दूसरा
बादमी शुरू करें। पायोनिवर जी, आपकी बारी है।

3. स्कूली अध्ययन-मंडलियों* का कार्य.-हमारे स्कूल में,-

*मूल्य विषयों से परे किसी चीज में दिलचस्पी रखने वाले बच्चे
क्लास के बाद उनका अध्ययन मंडलियों में करते हैं। आवश्यक शिक्षकों
तथा उपकरणों की व्यवस्था स्कूल की घोर से की जाती है। -अनु०

पाबोनिबर ने पूछ किया, -5 मंडलियाँ हैं, जिनमें क्रमशः मिस्वी, कर्डीमिरी व फोटोग्राफी के कार्य, गतरंज का खेल तथा कोरस-गान लिखाया जाता है। मिस्वीयों की मंडली एक दिन छोड़ कर काम करती है, बर्डीयों की -दो दिन छोड़ कर हर तीसरे दिन, फोटोग्राफी की - हर चौथे दिन और गतरंज व कोरस-गान की - क्रमशः हर पाँचवे तथा छठे दिन। एक जनवरी को स्कूल में सभी पाँच मंडलियाँ काम कर रही थीं। इसके बाद दिये गये रूटिन के अनुसार काम करती रहीं। प्रश्न है कि प्रथम तीन महीनों में ऐसी कितनी शामें थीं जब स्कूल में पाँचों मंडलियाँ साथ काम कर रही थीं?

-यह अधिबर्ष था या साधारण वर्ष? -पाबोनिबर से पूछा गया।

-साधारण? अर्थात् तीन महीनों - जनवरी, फरवरी और मार्च - में 90 दिन गिने जाने चाहिये?

-बाहिर है।

मैं आपकी पहली में एक और प्रश्न शामिल करने की अनुमति माँगता हूँ, - प्रोफेसर ने कहा। - इन तीन महीनों में कितनी ऐसी शामें थीं, जब स्कूल में एक भी मंडली काम नहीं कर रही थी?

-मैं समझ गया! - आवाज मुनामी दी। - प्रश्न में एक चाल छिपी है। कोई भी ऐसा दिन नहीं होगा, जब सभी पाँच मंडलियाँ काम करेंगी या एक भी नहीं करेंगी। यह बिल्कुल साफ है।

-क्यों? - अध्यापक ने पूछा।

-मैं समझा नहीं सकता, पर मुझे लग रहा है कि जवाब देने वालों को बेवकूफ बनाना चाहते हैं।

-यह कोई तर्क नहीं हुआ। शाम को पता चलेगा कि आपको सही लग रहा है या गलत। अब आपकी बारी है, मित्र!

4. कौन अधिक गिना? - दो घादमी एक धंटे के दौरान फूटपाथ पर सभी घाने और जाने वाले लोगों को गिन रहे थे। पहला घादमी पर के फाटक के पास खड़ा था और दूसरा फूटपाथ पर घाने-भीछे घूम रहा था। किसकी गिनती में अधिक लोग आये?

-चलते रहने पर अधिक लोग गिनती में आ जायेंगे, यह बिल्कुल स्पष्ट है, - टेबुल के दूसरे छोर से आवाज आयी।

- उत्तर नाम को पता चलेगा, - अध्यक्ष ने ऐतान किया। - अब किसी बारी है?

5. दादा-बौता. - मैं सन् 1932 की बात बताने जा रहा हूँ। उस समय बेरी उस ठीक उतनी थी, जितनी मेरे जन्म-वर्ष के दो आधिविरी धकों की संख्या बताती है। जब मैं ने इस संबंध में अपने दादा जी से बात की, तो उन्होंने यह कह कर मुझे आश्चर्यचकित कर दिया कि उनकी उम्र के साथ भी यही बात है। मुझे यह असंभव सा लगा...

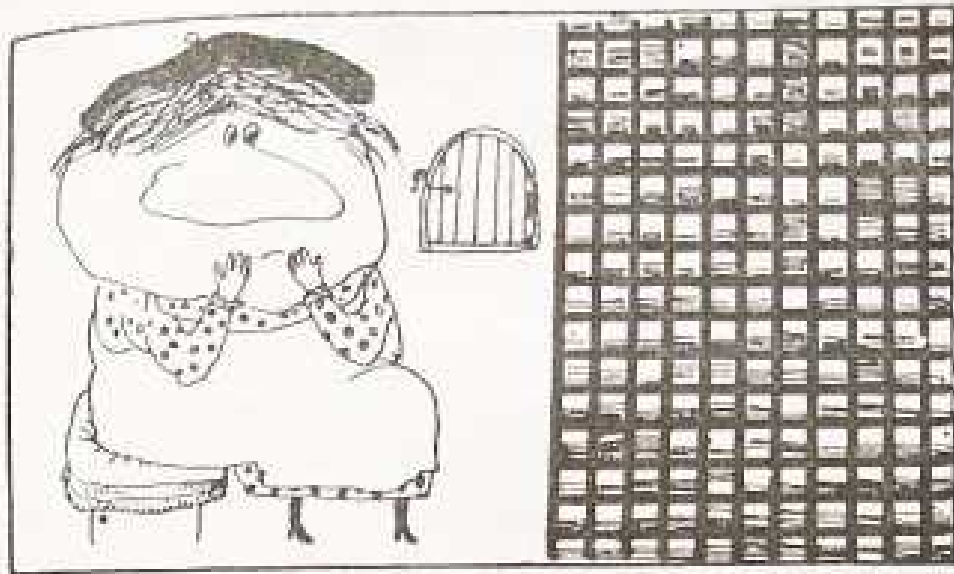
- बाहिर है कि असंभव है, - किसी की आवाज बीच से उठी।
- मानिये कि बिल्कुल संभव है। दादाजी ने यह सिद्ध कर के दिया कि या उस भी उस समय हम दोनों की?

6. रेल-टिकटें. - मैं स्टेशन पर बुकिंग-क्लर्क हूँ, - खेल में आने आग देने वाली ने कहा। - बहुतों को यह काम आसान लगता है। उन्हें संदेह भी नहीं होता कि एक छोटे स्टेशन के भी बुकिंग-क्लर्क की टिकटों की कितनी बड़ी संख्या के साथ काम करना पड़ता है। आधिविरी यात्रियों को उस लाइन के किसी भी स्टेशन तक जाने के लिये टिकट की जरूरत पड़ सकती है और एक ही ओर की नहीं, बल्कि दोनों ओर की आती-जाती टिकट की भी आवश्यकता पड़ सकती है। मैं 25 स्टेशनों वाली लाइन पर काम करती हूँ। बतायें कि इन सभी स्टेशनों के लिये कुल कितने प्रकार के टिकट रेल-विभाग को छापने पड़ते हैं?

- अब आपकी बारी है, पायलट महोदय, - अध्यक्ष ने कहा।

7. हेलीकाप्टर की उड़ान. - लेनिनघाट से एक हेलीकाप्टर ठीक उत्तर की ओर उड़ता है। इस दिशा में 500 कि० मी० उड़ने के बाद वह पूर्व की ओर मुड़ता है। इस दिशा में फिर 500 कि० मी० उड़ने के बाद वह पश्चिम की ओर मुड़ता है और 500 कि० मी० उड़ता है। इसके बाद पश्चिम की ओर मुड़ता है और 500 कि० मी० उड़ कर उतर आता है। प्रश्न है: हेलीकाप्टर के उतरने का स्थान कहाँ है; लेनिनघाट से किस ओर है - पूरब, पश्चिम, उत्तर या पश्चिम?

- बचकूनों के लिये यह सवाल है, - किसी ने कहा, - 500 कदम धरने, 500 कदम धरने, 500 कदम पीछे और 500 कदम धरने - कहाँ धरने? नहीं, जहाँ से चले थे।



चित्र 2. "मैं बुकिंग बलक हूँ"।

- फिर बतायें, कहां आपके अनुसार हेलीकाप्टर उतरा?
- उसी लेनिनश्राद के हवाई अड्डे पर, जहां से उड़ा था। क्या सही नहीं है?
- नहीं।
- तब मेरी समझ में कुछ नहीं आ रहा।
- सचमुच इसमें कोई गड़बड़ी है, - पड़ोसी ने बातचीत में धुसते हुए कहा। - क्या हेलीकाप्टर लेनिनश्राद में नहीं उतरा? .. क्या प्रश्न पुष्ट नहीं सकते आप?

पायलट ने सहर्ष अनुरोध पूरा कर दिया। ध्यानपूर्वक सुनने के बाद सब चकरा कर एक दूसरे की ओर देखने लगे।

- और, - अध्यक्ष ने कहा, - इस प्रश्न के बारे में सोचने के लिये शाम तक समय है। अभी आगे चलें।

8. छाया. - अगली पहली सुनाने वाले ने 'हेलीकाप्टर को ही अपनी पहली का कथानक बनाने की अनुमति मांगी और पूछा: क्या कहा होगा - हेलीकाप्टर या उसकी पूर्ण छाया?

- क्या इतनी-सी पहली है?
- हाँ।

छाया निस्तरेह हेलीकाप्टर से बड़ी होगी, क्योंकि सूर्य-किरणें पंखों की तरह घपसूत होती हैं, - हल तुरंत सामने रखा गया।

- उबटा, - किसी ने आपत्ती की, सूर्य-किरणें समानांतर चलती हैं, बतः हेलीकाप्टर और उसकी छाया बराबर होंगी।

- क्या कहते हैं? क्या सामने कभी बादलों के पीछे छिपे सूरज से घपसूत होती किरणों को नहीं देखा है? जब खुद पंखों से देखेंगे, तब विश्वास करेंगे कि सूर्य-किरणें कितनी घपसूत होती हैं। हेलीकाप्टर की छाया हेलीकाप्टर से काफी बड़ी होगी, जैसे बादल की छाया खुद बादल से बड़ी होती है।

- फिर सूर्य-किरणों को घपसर समानांतर क्यों मानते हैं? नौयात्री, ज्योतिर्विद् - सभी यही मानते हैं...

अध्यक्ष ने विवाद बढ़ने नहीं दिया और अगली पहेली के लिये अनुरोध किया।

9. तीलियों का प्रश्न. अगले बक्ता ने टेबल पर डिब्बी की सारी तीलियां उलट दी और उन्हें तीन डेरों में बांटने लगा।

- आप क्या प्रतीती मुलगाना चाहते हैं? - अतीषों ने सजाक शुरू किया।

- पहली तीलियों से संबंधित है, - पहली सुनाने वाले ने समझाया। - वे रहे उनके तीन अमान डेर। तीनों में कुल मिला कर 48 तीलियां हैं। किस डेर में कितनी है, मैं नहीं बताऊंगा। आप निम्न तथ्य जान लें: यदि पहले डेर से दूसरे में इतनी तीलियां मिला दू, जितनी दूसरे डेर में थी, फिर दूसरे से तीसरे में उतनी तीलियां रखू, जितनी तीसरे डेर में पहले से थी और, अंत में, तीसरे से पहले डेर में उतनी तीलियां बाव दू, जितनी पहले डेर में बची होंगी, तो सभी डेरों में तीलियों की संख्याएं समान हो जाएंगी। अब बताइये, प्रत्येक डेर में पहले कितनी तीलियां थीं?

10. घोलेबाज शूठ - वह पहली, - अगले ने कहना शुरू किया, - एक प्रश्न की याद दिलाती है, जिसे बहुत दिन पहले एक ग्रामीण 'संगितज्ञ' ने मुझे दिया था।

यह एक पूरा किरसा था और काफी मजेदार किरसा था। जंगल में एक किरसान को कोई अनजान मुझा मिला। दोनों वाले करने लगे। कुछे में किरसान को ध्यान से देखा, फिर कहा:

- मैं जंगल में एक कटे टूट को जानता हूँ। जकरत पर मदद करने का वह अनोखा गुण रखता है।

- कैसे वह मदद करता है? रोग दूर करता है?

- वह दवा का काम नहीं करता। वह पीसे दुगुने करता है। उसकी जड़ के पास बट्ट्या रख कर सौ तक गिनते हैं—और बट्टए में पीसे दुगुने हो जाते हैं। ऐसा अनूठा गुण है उस टूट में।

- काश, मुझे एक मौका मिलता!—किसान ने सपने देखते हुए कहा।

- गुन भी कर सकते हो। लेकिन मुक्त में नहीं; पीसे देने होंगे।

- कैसे? काफी महंगा होगा क्या?

- उसे, जो राह दिखायेगा। मतलब कि मुझे। और महंगे-सस्ते की बात अलग से होगी।

मोत-मोत शुरू हो गया। यह जान कर कि किसान के पास पीसे कम है, बूढ़ा एक बार पीसे दुगुना कराने के 1 स्वल 20 कोपेक लेने को मान गया। इसी पर दोनों राजी हो गये।

बूढ़ा किसान को घने जंगल में ले गया, काफी देर तक घुमाता रहा और घंट में झाड़ियों में घास से दबे एक टूट के पास पहुँचा। किसान के हाथ से बट्ट्या लेकर बूढ़े ने उसे टूट की जड़ों के बीच घुसेड़ दिया। 100 तक गिनने के बाद बूढ़े ने जड़ों में इधर-उधर कुछ इड़ना और टटोलना शुरू कर दिया। घंट में उसने बट्टए को झूँड़ निकाला और किसान के हाथों में दे दिया।

किसान ने बट्टए में झाँक कर देखा। पीसे सचमुच दुगुने हो गये थे! उसने से उसने। स्वल 20 कोपेक गिन कर बूढ़े को दे दिये और बचे पैसों को फिर से अनूठे टूट की जड़ में रखने का अनुरोध किया।

फिर सौ तक गिना गया, बूढ़ा फिर जड़ों में हाथ घुसा कर कुछ इड़ने-सा लगा और चमत्कार फिर ने दुहरा गया: बट्टए में पीसे दुगुने हो गये। बूढ़े को बट्टए से शर्त के अनुसार पुनः 1 स्वल 20 कोपेक दिए गये।

बट्टए को तीसरी बार टूट की जड़ों में घुसाया गया। पीसे इस

बार भी दुगुने हो गये। लेकिन जब किसान बूढ़े का मेहनताना पका कर चुका, तो बटुए में एक कोपक भी नहीं बचा। बेचारे ने इस गोरख-धंधे में सारे पैसे गंवा दिये। दुगुना करने को अब कुछ बचा नहीं था और किसान उदास होकर जंगल से निकल पड़ा।

पैसे दुगुने होने के चमत्कार का रहस्य तो आप बेगक समझ गये होंगे: बूढ़ा यूँ ही जड़ों के बीच बटुआ डूबने में देर नहीं लगाया करता था। लेकिन क्या आप दूसरे प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं: घोखेबाज डंड के साथ वे सभाने प्रयोग करने के पहले किसान के पास कितने पैसे थे?

11. दिसंबर की समस्या—साधियों, भाषाविद् होने के नाते मैं गणित से बहुत दूर हूँ,—घघेड़ आदमी ने कहना शुरू किया (उसी की बारी थी अब पहली सुनाने की)।—मुझसे गणित के प्रश्नों की उम्मीद न करें। मैं सिर्फ अपने परिचित क्षेत्र से ही कोई प्रश्न पूछ सकता हूँ। कैलेंडर से संबंधित एक पहली है। सुनाऊँ?

—सवस्य!

—बारहवें महीने का नाम है "दिसंबर"। क्या आप "दिसंबर" का अर्थ जानते हैं? इस शब्द का मूल है यूनानी शब्द "डेका"*, अर्थात् दस। डेकालीटर का अर्थ है दस लीटर, डेकाद का—दस दिन, आदि। इस प्रकार बारहवें महीने दिसंबर का नाम हुआ "दसवाँ"। इस गड़बड़ी को कैसे समझाया जा सकता है?

—बस, अब एक और पहली बच गयी है,—अध्यक्ष ने घोषित किया।

12. अंकगणित का जादू—मेरा नंबर आखिरी है, बारहवाँ। मन बहलाव के लिये मैं अंकों का एक जादू दिखाता हूँ। आपसे अनुरोध होगा कि आप उसका रहस्योद्घाटन करें। आप में से कोई या अध्यक्ष महोदय, आप, एक कागज पर मुझ से छिपा कर तीन अंकों की कोई संख्या लिख लें।

* अंग्रेजी में दिसंबर, डेका, डेकाड, आदि। यूनानी भाषा में 'ड' ध्वनि नहीं है।

- इसमें गुन्य भी हो सकते हैं?
- कोई रोक नहीं है। कोई भी तीन धकों की संख्या, जो आपको पसंद हो।
- लिख लिया। अब क्या करना है?
- इसके पास ही इस संख्या को फिर से लिख कर इसे छे धकों की संख्या बना लें।
- तैयार है।
- कागज अपने पड़ोस में बैठे आदमी को दे दीजिये, जो मुझसे दूर बैठा है। वह इसमें सात से भाग दे ले।
- कहना आसान है: सात से भाग दे लें। हो सकता है कि संख्या सात से कटे ही न।
- पहले भाग दीजिये, फिर देखा जायेगा।
- आपके भाग्य से भाग पूरा हो गया।
- भागफल बिना मुझे बताये कागज अपने दूसरे पड़ोसी को दे दीजिये। वह उसमें 11 से भाग दे ले।
- आप सोचते हैं कि फिर भाग लग जायेगा?
- भाग दीजिये। शेष नहीं बचेगा।
- नचमुच शेष नहीं बचता! अब क्या करना है?
- उत्तर अपने आदमी को दे दें। वह उसे... उदाहरण के लिये, 13 से विभाजित करे।
- अच्छी संख्या नहीं चुनी आपने। ऐसी संख्याएँ बहुत ही कम हैं, जो 13 से विभाजित होती हैं।... चरे नहीं, आपकी किस्मत अच्छी है! पूरा-पूरा कट जाता है।
- एक कागज पर उत्तर लिख कर मुझे दे दीजिये। कागज मोड़ लीजिये, ताकि मैं संख्याएँ देख न सकूँ।
- कागज खोले और "जादूगर" ने कागज अध्याश को सौंप दिया।
- यह रही संख्या, जिसे आपने पहले सोच कर लिखा था। ठीक है न?
- बिल्कुल ठीक! -कागज खोल कर आश्चर्य से उसने कहा। -वही संख्या मैंने सोची थी... अब कोई पहिली गुनामे वाला नहीं रहा, अब सारा धर्म करनी चाहिये। अच्छा है कि सर्पा भी बम चुकी है।

पहेलियों के उत्तर आज ही शाम को खाने पर घोषित किये जायेंगे।
घाप उनके हल कागज पर लिख कर मुझे दे सकते हैं।

1-12 पहेलियों के हल

1. मैदान में मिलहरी वाली पहेली का पूर्ण विश्लेषण पहले ही दिया जा चुका है। हम खाने की पहेलियाँ देखेंगे।

2. जैसा कि बहुत से लोग करते हैं, घाट कोपेक को 1 कोपेक प्रति कुंदा की दर से 8 कुंदों का मूल्य मानना गलत होगा। ऐसे 8 कुंदों के तीसरे भाग के लिये दिये गये थे, क्योंकि भाग का इस्तेमाल तीनों ने समान रूप से किया था। इससे निष्कर्ष निकलता है कि 8 कुंदों की कीमत 8×3 , अर्थात् 24 कोपेक प्रांकी नहीं थी और एक कुंदा की कीमत थी 3 कोपेक।

अब समझता सरल होगा कि किसे कितना मिलना है। पंचलकड़ा ने 5 कुंदों के रूप में 15 कोपेक खर्च किया, लेकिन उपभोग किया सिर्फ 8 कोपेक का। उसे $15-8$, अर्थात् 7 कोपेक मिलने चाहिये। त्रिलकड़ा को तीन कुंदों के लिये 9 कोपेक मिलने चाहिये, पर वह 8 कोपेक का उपभोग कर चुकी है। अतः उसे $9-8$, अर्थात् 1 कोपेक मिलना चाहिये।

अतः सही बँटवारे के अनुसार पंचलकड़ा को 7 कोपेक मिलने चाहिये और त्रिलकड़ा को - 1 कोपेक।

3. यदि हम ऐसी त्र्युत्तम संख्या हूँ से, जो बिना शेष 2,3,4,5 तथा 6 से विभाजित हो, तो प्रथम प्रश्न - कितने दिनों बाद स्कूल में सभी मंडलियाँ फिर एक साथ काम करेंगी - का उत्तर आसानी से दिया जा सकता है। स्पष्ट है कि ऐसी संख्या 60 है। अर्थात् 61-वें दिन फिर से पाँचों मंडलियाँ एक साथ काम करेंगी : मिस्त्रियों की 30 द्वि-दिवसीय अंतराल के बाद, बड़बंदिरी की - 20 त्रि-दिवसीय अंतरालों के बाद, फोटोग्राफी की - 15 चार-दिवसीय अंतरालों के बाद, अंतराब्द की - 12 पंच-दिवसीय अंतरालों के बाद और कोरस-गान की - 10 छ-दिवसीय अंतरालों के बाद। 60 दिन के पहले ऐसी शाम नहीं हो

सकती। ऐसी काम फिर 60 दिनों बाद प्रायेणी, पर यह वर्ष के दूसरे चतुर्थांश में होगा।

इस प्रकार, प्रथम चतुर्थांश में सिर्फ एक काम होगी, जब पीछे मंडलियाँ फिर से एक साथ काम करेंगी।

पहली के दूसरे प्रश्न - कितनी शामों को एक भी मंडली काम नहीं करेगी - का हल अधिक जटिल है। इस तरह के दिनों को गिन करने के लिये 1 से 90 तक की सभी संख्याओं को लिख लेना होगा। इनमें से निस्त्रियों की मंडली के काम करने के दिनों को, अर्थात् 1,3,5,7,9, आदि संख्याओं को काट देना होगा। इसके बाद इनमें से बड़े-बड़े की मंडली के काम करने के दिन, अर्थात् 4-वें, 7-वें, 10-वें, आदि दिन काटने पड़ेंगे। जब हम फोटोग्राफी, शतरंज तथा कोर्स-गान की मंडलियों के काम करने के दिन काट चुकेंगे, तो सिर्फ वे दिन बचेने, जब प्रथम चतुर्थांश में एक भी मंडली ने काम नहीं किया।

इतना कर चुकने के बाद घाप देख सकते हैं कि मंडलियों के काम में छुट्टी के दिन बहुत-से हैं - कुल 24 दिन। जनवरी में ऐसे दिन 8 होंगे: 2-वीं, 8-वीं, 12-वीं, 14-वीं, 18-वीं, 20-वीं 24-वीं तथा 30-वीं जनवरी। फरवरी और मार्च में क्रमशः 7 और 9 ऐसे दिन होंगे।

4. दोनों ने जाने-जाने वालों की एक ही संख्या गिनी। फाटक के पास खड़ा व्यक्ति जाने वालों और जाने वालों को ही गिनता गया। सड़क पर घाने-पीछे घूमने वाला व्यक्ति सिर्फ अपने सामने से जाने वाले लोगों को गिनता है। पर चूंकि वह दोनों दिशाओं में घूम रहा है, वह भी जाने वालों और जाने वालों - दोनों को ही - गिन रहा है।

इस दूसरी तरह से भी दिखाया जा सकता है। फूटपाथ पर घूम-घूम कर गिनने वाला व्यक्ति जब पहली बार अपने खड़े मित्र के पास सीटता है, दोनों जाने-जाने वालों की एक ही संख्या पाते हैं, क्योंकि हर घावमी, जो खड़े व्यक्ति के पास से गुजरता है, घूम-घूम कर गिनने वाले को सामने से आता दिखेगा (या जाते वकत या सीटते वकत)। इसका विपरीत भी सत्य है। अतः हर बार जब घूम कर गिनने वाला व्यक्ति अपने खड़े मित्र के पास सीटता है, उतने ही लोगों

को गिनता है, जितनी को खड़ा व्यक्ति गिन चुका होता है। एक घंटे बाद जब दोनों गिलने वाले घाबिरी बार मिलते हैं और अपनी-अपनी गिनती एक दूसरे को बताते हैं, तब भी यही होगा।

5. पहली निगाह में लगता है कि प्रश्न सचमुच गलत है : निष्कर्ष निकलता है कि दादे और पोते की उम्र एक ही है। पर, जैसा हम अभी देखने, प्रश्न की शर्तें सरलतापूर्वक पूरी हो जाती हैं।

पोता अधिक संभव है कि 20-वीं सदी में पैदा हुआ था। अतः उसके जन्म के साल के प्रथम दो शंक 19 होंगे और पूरी संख्या में सैफड़े का स्थान लेंगे। बाकी बचे शंकों की संख्या दुगुना करने पर 32 घाना चाहिये। ऐसी संख्या 16 है। अतः पोते के जन्म का वर्ष है 1916 और सन् 1932 में उसकी उम्र 16 वर्ष थी।

दादा का जन्म निस्संदेह 19-वीं सदी में हुआ था ; उसके जन्म-वर्ष के प्रथम दो शंक 18 है। बाकी बचे शंकों की संख्या को दुगुना करने पर 132 घाने चाहिये। ऐसी संख्या 132 की घाटी, अर्थात् 66 होगी। दादा का जन्म सन् 1866 में हुआ था और 1932 में वह 66 वर्ष का था।

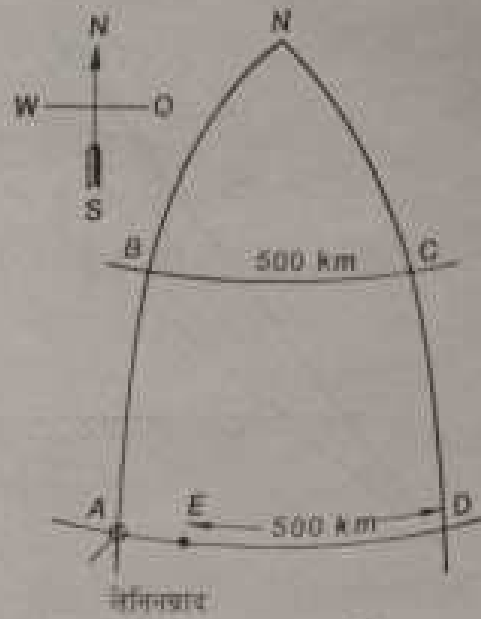
इस प्रकार सन् 1932 में दादे और पोते, दोनों की ही उम्र उतनी थी, जितनी उनके जन्म-साल के घाबिरी दो शंक बताते हैं।

6. 25 स्टेशनों में से प्रत्येक पर यात्री बाकी बचे स्टेशनों में से किसी के लिये भी टिकट मांग सकते हैं। अतः $25 \times 24 = 600$ प्रकार के भिन्न टिकट छापने पड़ेंगे। यदि यात्रियों को सिर्फ जाने के लिये ही नहीं, बल्कि वापस लौटने के लिये जाती-वाती टिकट की भी बरकत पड़ती है, तो विभिन्न टिकटों की संख्या दुगुनी, अर्थात् 1200 हो जायेगी।

7. प्रश्न में कोई अंतर्विरोध नहीं है। यह नहीं सोचना चाहिये कि हेलीकॉप्टर एक वर्ग की परिरेखा पर उड़ता है। पृथ्वी के गोल आकार को भी ध्यान में रखना चाहिये। बात यह है कि उत्तर की ओर देशांतर रेखाएँ परस्पर पास होती जाती हैं (चित्र 3), अतः लेनिनग्राद के घशांत से 500 कि० मी० उत्तर के घशांत पर 500 कि० मी० चल कर हेलीकॉप्टर अक्ष देशांतर रेखाओं को पार करता है, बनिस्वत कि दुः लेनिनग्राद के घशांत पर 500 कि० मी० की दूरी तय करने

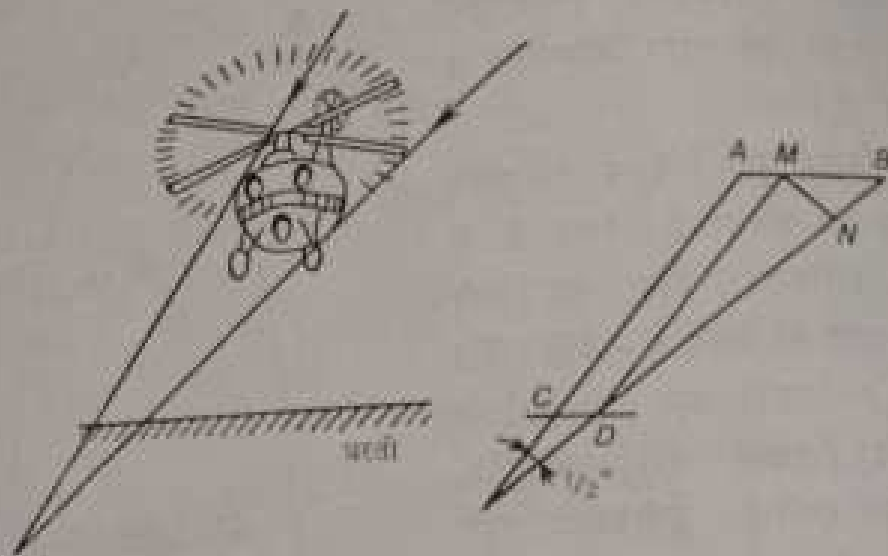
के बाद। फलस्वरूप, हेलीकाप्टर के उतरने का स्थान लेनिनग्राद से पूरब है।

कितना पूरब? इसका परिकलन किया जा सकता है। चित्र 3 में प्राण हेलीकाप्टर द्वारा तय किये गये रास्ते को देखते हैं - ABCDE। बिंदु N उत्तरी ध्रुव है। यहाँ से देशांतर रेखाएँ AB तथा DC समान होती हैं। हेलीकाप्टर पहले उत्तर की ओर, अर्थात् AN देशांतर रेखा पर 500 कि० मी० (A से B तक) उड़ता है। देशांतर पर



चित्र 3

111 कि० मी० की दूरी पृथ्वी के केंद्र पर। डिग्री का अक्षांश कोण बनाती है, अतः 500 कि० मी० की दूरी $500 : 111 \approx 4.5^\circ$ का अक्षांश कोण बनावेगी। लेनिनग्राद (A) का अक्षांश 60° है, अतः B का अक्षांश होगा $60^\circ + 4.5^\circ = 64.5^\circ$ । इसके बाद हेलीकाप्टर पूरब की ओर 500 कि० मी० की दूरी (BC) तय करता है। परिकलन कर सकते हैं या सारणियों से पता लगा सकते हैं कि BC अक्षांश (64.5°) पर 48 कि० मी० की दूरी पृथ्वी के केंद्र पर एक डिग्री का देशांश कोण बनाती है। अतः 500 कि० मी० की दूरी $500 : 48 \approx 10.4^\circ$ का देशांश कोण बनाती है। अर्थात् हेलीकाप्टर B से C तक में 10.4° देशांश तय करता है। इसके बाद वह CD देशांतर रेखा पर 500 कि० मी० चल कर पुनः लेनिनग्राद के अक्षांश पर पहुँच जाता है। अब वह पश्चिम की ओर D से A की ओर 500 कि० मी० की दूरी तय करता है और यह दूरी AD से कम है। AD दूरी में उतने ही देशांश है जितने BC में, अर्थात् 10.4° । पर 60° अक्षांश पर एक डिग्री देशांतर की संवाई 55.5 कि० मी० है। अतः AD की पूरी संवाई हुई $55.5 \times 10.4 \approx 577$ कि० मी०। इस प्रकार, हम देखते हैं कि हेलीकाप्टर लेनिनग्राद में नहीं, बल्कि उससे 77 कि० मी० पूरब



चित्र 4

उत्तरा है। वहाँ आदीष्की झील है और हेलीकाप्टर को पानी की सतह पर उतारना पड़ा होगा।

8. इस प्रश्न पर बहस करने वाले लोगों ने कई गलत बातें कही हैं। यह गलत है कि पृथ्वी तक आने वाली सूर्य-किरणों के अपसरण की गणना की जा सकती है। पृथ्वी-सूर्य की दुरी की तुलना में इतनी छोटी है कि किरणों के अपसरण का कोण नगण्य होता है। व्यावहारिक तौर पर इन किरणों को समानांतर मान सकते हैं। बादलों के पीछे से छिंके सूर्य की किरणों का पंखाकार अपसरण परिप्रेक्ष्य के प्रभाव के कारण प्रतीत होता है।

परिप्रेक्ष्य में समानांतर किरणें दूर जा कर संसृत प्रतीत होती हैं। घाग दूर जाने वाली रेल-पटरियों या किसी लम्बी बीथी का दृश्य स्मरण कर सकते हैं।

लेकिन सूर्य-किरणों के पृथ्वी पर समानांतर आपतन से यह निष्कर्ष निकालना गलत होगा कि हेलीकाप्टर तथा उसकी छाया के आकार बराबर होंगे। चित्र 4 को देख कर आप समझ जायेंगे कि हेलीकाप्टर की पूर्ण छाया का आकार पृथ्वी की दिशा में पड़ेगा। अतः पृथ्वी तल पर छाया का आकार हेलीकाप्टर के आकार से छोटा होगा : CD छोटा होगा AB से।

यदि हेलीकाप्टर की सही ऊँचाई ज्ञात हो, तो दोनों की लंबाइयों

के अंतर का कलन किया जा सकता है। माना कि हेलीकाप्टर पृथ्वी-तल से 100 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है। AC तथा ED सरल रेखाओं के बीच का कोण जमीन से सूर्य का दृश्य-कोण है। इस कोण का माप $1/2^\circ$ ज्ञात है। यह भी ज्ञात है कि घाँचों पर $1/2^\circ$ का कोण बनाने वाली वस्तु घाँचों से अपने आकार के 115 गुनी अधिक दूरी पर होती है। अतः रेखा-खंड MN (जो जमीन पर स्थित घाँच पर $1/2^\circ$ का कोण बनाती है) AC का 115-वाँ अंश है। AC की लम्बाई A से जमीन तक की अनुलम्बिक लंबाई से बड़ी है। यदि सूर्य-किरणें पृथ्वी तल के साथ 45° का कोण बनाती हैं, तो AC की लंबाई (जब कि हेलीकाप्टर की ऊँचाई 100 मीटर है) लगभग 140 मीटर होगी। अतः $MN = \frac{140}{115} \approx 1.2$ मीटर।

लेकिन हेलीकाप्टर की लंबाई और उसकी छाया की लंबाई का अंतर MB बड़ा है MN से। चूँकि $\angle MBD$ लगभग ठीक 45° है, MB 1.4 गुना बड़ा है MN से। अतः $MB = 1.2 \times 1.4 \approx 1.7$ मीटर।

जो कुछ भी ऊपर कहा गया है, वह हेलीकाप्टर की पूर्ण छाया के बारे में कहा गया है, जो काली और स्पष्ट होती है। ये कपन तथा-कथित उपछाया (अर्द्धछाया) के लिये सही नहीं उतरते, जो हल्की तथा अस्पष्ट होती है।

हमारे कलन से स्पष्ट है कि यदि हेलीकाप्टर की जगह पर 1.7 मीटर से कम व्यास वाला कोई गुब्बारा होता तो जमीन पर उसकी कोई पूर्ण छाया नहीं बनती। हम सिर्फ धुंधली अर्द्धछाया देखते।

9. प्रश्न का हल अन्त से शुरू करते हैं। अंत में तीनों डेरों में तीलियों की संख्याएँ बराबर थीं। तीलियों का इधर-उधर रखना उनकी कुल संख्या पर कोई प्रभाव नहीं डालता, अतः उनकी कुल संख्या पहले की तरह 48 ही रही। अतः अंत में हर डेर में 16 तीलियाँ थीं:

पहला डेर	दूसरा डेर	तीसरा डेर
16	16	16

ठीक इसके पहले प्रथम डेर में उतनी तीलियाँ रखी गयी थीं, जितनी उसमें पहले से थीं। दूसरे जखदों में, प्रथम डेर में तीलियों की

संख्या दुगुनी हो गयी। अर्थात् प्रथम डेर में 16 नहीं, बल्कि सिर्फ 8 तीलियाँ थीं। तीसरे डेर में, जहाँ से 8 तीलियाँ ली गयी थीं, $16 + 8 = 24$ तीलियाँ थीं:

पहला डेर	दूसरा डेर	तीसरा डेर
8	16	24

अब, हमें ज्ञात है कि इसके पूर्व दूसरे डेर से तीसरे में उतनी तीलियाँ रखी गयी थीं, जितनी उसमें पहले से थीं। अर्थात्, 24—तीसरे डेर में पहले से पड़ी तीलियों की दुगुनी संख्या है। अतः तीलियों के प्रथम डेर-फेर के बाद डेरों में उनकी संख्या का क्रम इस प्रकार था:

पहला डेर	दूसरा डेर	तीसरा डेर
8	$16 + 12 = 28$	12

अब समझना आसान है कि तीलियों के प्रथम डेर-फेर के पहले (अर्थात् दूसरे डेर में जितनी तीलियाँ थीं, उतनी ही उसमें पहले डेर से जाने के पहले) डेरों में तीलियों की संख्या का क्रम इस प्रकार था:

पहला डेर	दूसरा डेर	तीसरा डेर
22	14	12

डेरों में तीलियों की संख्या का आरंभिक क्रम यही है।

10. इस पहली का हल भी घंट से शुरू करना अधिक सरल होगा। हमें ज्ञात है कि तीसरी बार पैसों के दुगुने होने पर बटुए में 1 रुपय 20 कोपक की राशि थी (जिसे बूड़े ने अंतिम बार प्राप्त किया)। दुगुना होने के पहले कितने पैसे थे? 60 कोपक। ये 60 कोपक बूड़े को 1 रुपय 20 कोपक देने के बाद बचे थे, अतः बटुए में कुल राशि थी 1 रुपय 20 कोपक + 60 कोपक = 1 रुपय 80 कोपक।

अब: दूसरी बार पैसों के दुगुने होने के बाद बटुए में 1 रुपय 80 कोपक की राशि थी। दुगुना होने के पहले बटुए में 90 कोपक थे, जो बूड़े को 1 रुपय 20 कोपक देने के बाद बचे थे। अतः बटुए में कुल राशि 90 कोपक + 1 रुपय 20 कोपक = 2 रुपय 10 कोपक

की। पहली बार पैसों के दुगुने होने के पहले बटुए में कितने पैसे थे?
 2 रुबल 10 कोपेक का आधा, अर्थात् 1 रुबल 5 कोपेक। यही वह
 राशि है, जिसने किसान ने अपना असफल कारोबार शुरू किया था।
 देखें कि उत्तर सही है या नहीं।

बटुए की राशि

पहली बार दुगुने होने पर . . . $1 \text{ रु० } 5 \text{ को०} \times 2 = 2 \text{ रु० } 10 \text{ को०}$
 पहली बार बूढ़े को देने पर . . . $2 \text{ रु० } 10 \text{ को०} - 1 \text{ रु० } 20 \text{ को०} =$
 $= 90 \text{ को०}$
 दूसरी बार दुगुने होने पर . . . $90 \text{ को०} \times 2 = 1 \text{ रु० } 80 \text{ को०}$
 दूसरी बार बूढ़े को देने पर . . . $1 \text{ रु० } 80 \text{ को०} - 1 \text{ रु० } 20 \text{ को०} =$
 $= 60 \text{ को०}$
 तीसरी बार दुगुने होने पर . . . $60 \text{ को०} \times 2 = 1 \text{ रु० } 20 \text{ को०}$
 तीसरी बार बूढ़े को देने पर . . . $1 \text{ रु० } 20 \text{ को०} - 1 \text{ रु० } 20 \text{ को०} = 0$

11. आज का कैलेंडर प्राचीन रोमनों के कैलेंडर से बना है।
 जुलियस सीजर तक रोमन वर्ष की शुरुआत 1 जनवरी से नहीं बल्कि
 1 मार्च से मानते थे। इस प्रकार उस समय दिसंबर दसवाँ महीना ही
 था। वर्ष की शुरुआत 1 जनवरी से मानने का निर्णय लेते समय महीनों
 के नामों में कोई परिवर्तन नहीं किया गया था। इसीलिये महीनों के
 नामों तथा उनकी क्रम-संख्या में असंगति पैदा हो गयी, जो अभी तक
 कई महीनों के नामों के साथ रह गयी है।

महीनों के नाम	नामों के अर्थ	क्रम-संख्या
सितंबर	सातवाँ	9
अक्टूबर	आठवाँ	10
नवंबर	नवाँ	11
दिसंबर	दसवाँ	12

12. सोची गयी संख्या के साथ क्या किया गया था, ध्यान से
 देखते जाएं। सबसे पहले उसके पास वैसी ही संख्या लिख कर छः

घंकों की संख्या बना ली गयी थी। यह वही हुआ यदि उस संख्या पर तीन गुण बैठा देते और उसमें वही संख्या जोड़ देते। उदाहरणार्थः

$$872872 - 872000 + 872$$

संख्या के साथ दरअसल क्या किया गया था, अब अधिक स्पष्ट है: उसमें 1000 से गुणा कर दिया गया फिर गुणनफल में उसे जोड़ दिया गया। यदि संक्षेप में कहें, तो सोची गयी संख्या को 1001 से गुणा कर दिया गया।

फिर इस गुणनफल के साथ क्या किया गया? उसे क्रमानुसार 7, 11 तथा 13 से विभाजित कर दिया गया। इसका अर्थ है कि उसमें $7 \times 11 \times 13 = 1001$ से भाग दे दिया गया।

इस प्रकार, सोची गयी संख्या में 1001 से गुणा किया गया और इसके बाद गुणनफल में 1001 से भाग दे दिया गया। आश्चर्य नहीं, यदि फिर वही संख्या प्राप्त हो जाती है।

विश्राम-गृह की पहेलियों का अध्याय खत्म करने के पहले मैं आपकी संकल्पित के तीन और जादू बताना चाहता हूँ, जो आप अपने मित्रों को विश्राम के क्षणों में दिखा सकेंगे। इनमें से दो की मदद से आप मन में सोची गयी संख्या भाँप सकते हैं और तीसरे की मदद से आप बता सकते हैं कि कौन सी चीज किसके पास है।

ये जादू पुराने हैं। संभव है कि आप इन्हें जानते हों, पर बहुतों को शायद ही पता होगा कि ये किस बात पर आधारित हैं। जादू के सैद्धांतिक आधार को जाने बिना उसे विज्वागपूर्वक दिखा सकना असंभव है। प्रथम दो जादुओं का आधार दिखाने के लिये आपको प्रारंभिक संकल्पित के क्षेत्र में एक विलकुल सहज और सरस यात्रा करनी पड़ेगी।

13. बटा हुआ घंटा. आपका मित्र कोई बहुपंकी संख्या, उदाहरण के लिये 847, सोच कर रखता है। आप इसके घंकों को जोड़ने के लिये कहें: $8 + 4 + 7 = 19$ । योगफल को उस संख्या से घटाने को कहें। आपके मित्र के पास बचेगा: $847 - 19 = 828$ ।

एक घापका मिला बची संख्या में से कोई एक घंक काट दे— कोई भी; कोई फर्क नहीं पड़ता— और बाकी घापको बता दे। घाप औरन वह कटा घंक बता देते हैं, हाँलाकि घाप नहीं जानते कि कौनसी संख्या सोची गयी थी तथा उसके साथ कैसे क्या किया गया था।

कैसे घाप यह कर सकते हैं और इस जादू का रहस्य क्या है?

यह काफी सरल है: घाप कोई ऐसा घंक चुड़ते हैं, जो बताये गये घकों के योग से जुड़ कर 9 की निकटतम प्रपवर्त्य संख्या (9 से बिना शेष विभाजित होने वाली संख्या) दे सके। उदाहरण के लिये, यदि संख्या 828 में से पहला घंक (8) काटा गया हो तथा घाप को 2 और 8 घंक बताये गये हों, तो घाप उन्हें जोड़ कर $8+2=10$ प्राप्त करते हैं। 9 से कटने वाली इसकी निकटतम संख्या 18 है। 8 को रमो है। यही वह घंक है, जो काटा गया था।

ऐसा क्यों होता है? किसी संख्या में से उसके घकों के योग को घटाने पर 9 से विभाजित होने वाली संख्या ही बचती है, अर्थात् बची संख्या के घकों का योग 9 से विभाजित होना ही। मान लें कि सोची गयी संख्या में घंक a सैकड़े के स्थान पर है, घंक b दहाई के तथा घंक c इकाई के स्थान पर है। मतलब कि इस संख्या को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

$$100a + 10b + c$$

इस संख्या से उसके घकों का योगफल $a+b+c$ घटाने पर प्राप्त होगा:

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$$

$9(11a + b)$ निस्संदेह 9 से विभाजित होता है। मत: किसी भी संख्या से उसके घकों के योगफल को घटाने पर ऐसी संख्या मिलेगी, जो 9 से बिना शेष विभाजित होती है।

जादू दिखाते वक्त ऐसा भी हो सकता है कि बताये गये घकों का योगफल स्वयं 9 से विभाजित होता है (जैसे 4 और 5)। इसका मतलब है कि काटा गया घंक 0 या 9 है। घापका उत्तर भी ऐसा ही होना चाहिये: 0 या 9।

इसी जादू का एक और बदला हुआ रूप : सोची गयी संख्या से उसके अंकों के योगफल को घटाने की बजाय उसमें से उसके अंकों के उलट-फेर से प्राप्त कोई संख्या घटायी जा सकती है। उदाहरणार्थ, संख्या 8247 से 2748 घटायी जा सकती है (यदि उलट-फेर से प्राप्त संख्या सोची गयी संख्या से बड़ी हो, तो बड़ी में से छोटी संख्या घटाने है)। इसके बाद वही करते हैं, जो पहले किया गया था : $8247 - 2748 = 5499$ । यदि काटा गया अंक 4 हो, तो बताये गये अंकों को जोड़ कर घाप $5 + 9 + 9 = 23$ प्राप्त करते हैं और समझ जाते हैं कि अंक 4 काटा गया है, क्योंकि 23 के लिये 9 से कटने वाली निकटतम संख्या 27 है, अर्थात् 23 में 4 जोड़ने पर 9 से कटने वाली निकटतम संख्या 27 प्राप्त होती है।

14. बिना कुछ पूछे संख्या भाँपना. घाप अपने मित्र से तीन अंकों की कोई संख्या सोचने को कहते हैं। संख्या ऐसी होनी चाहिये कि अन्तिम अंक शून्य न हो तथा अन्तिम के अंकों का अंतर 2 से कम न हो। इसके बाद घाप उसे इस संख्या के अंकों का क्रम उलट कर लिखने को कहते हैं। दोनों संख्याओं में से जो बड़ी हो, उसमें से वह छोटी को घटा ले। फिर, उत्तर में प्राप्त संख्या को उल्टे क्रम से लिख कर उसमें उत्तर की संख्या जोड़ने को कहते हैं और इसके बाद यह योगफल घाप अपने मित्र को स्वयं बता देते हैं।

यदि सोची गयी संख्या, उदाहरण के लिये, 467 हो, तो मित्र को उसके साथ निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती हैं :

$$\begin{array}{r} 467: 764; \quad 764 \quad 297 \\ - 467 \quad + 792 \\ \hline 297 \quad 1089 \end{array}$$

यही आखिरी योगफल - 1089 - घाप अपने मित्र को बताते हैं। कैसे घाप यह भाँपते हैं।

प्रश्न को व्यापक रूप में देखें : माना कि संख्या के अंक a, b, c हैं। c शून्य नहीं है और a तथा c का अंतर दो से कम नहीं है। संख्या को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$100a + 10b + c$$

इस संख्या के क्रम को उलटने पर प्राप्त संख्या है:

$$100c + 10b + a$$

दोनों संख्याओं का अंतर है:

$$99a - 99c$$

अब इसका निम्न रूपांतरण करें: $99a - 99c = 99(a - c) =$
 $= 100(a - c) - (a - c) = 100(a - c) - 100 + 100 - 10 +$
 $+ 10 - a + c = 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c).$

अर्थात् संख्याओं का अंतर ऐसी संख्या है, जिसमें

$$\text{सैकड़ों का अंक है: } a - c - 1,$$

$$\text{दहाई } > > > : 9,$$

$$\text{इकाई } > > > : 10 + c - a$$

इस संख्या के अंकों का क्रम उलट देने पर प्राप्त संख्या है:

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$$

यदि इन दोनों संख्याओं को जोड़ दें:

$$\begin{aligned} & 100(a - c - 1) + 90 + 10 + c - a \\ + & 100(10 + c - a) + 90 + a - c - 1, \end{aligned}$$

तो मिलता है: $100 - 9 + 180 + 9 = 1089.$

अर्थात् a, b, c कोई भी अंक हों, आपको हमेशा एक ही संख्या मिलेगी: 1089। इसीलिये उत्तर भाषना कठिन नहीं है; आप इसे पहले से जानते हैं।

स्पष्ट है कि एक ही व्यक्ति को यह जादू दो बार नहीं दिखाया जा सकता, अन्यथा रहस्य खुल जायेगा।

15. किसने क्या लिया? इस मनोरंजक जादू को दिखाने के लिये तीन छोटी-मोटी वस्तुएं जो आसानी से जेब में धा जाये (जैसे पेंसिल, चाबी और छूरी), तैयार रखनी चाहिये। इसके सतिरिक्त, टेबुल पर

एक तस्तरी में 24 बादाम रख दें। बादाम न हीं तो तीसियों, सिपकों धारि से भी काम चलाना जा सकता है। तीस मित्रों को घाप पैसिल, चाबी और छुरी में से एक-एक चीज (जिसे जो पसंद हो!) घापकी धनुपरिचिति में छिपा कर अपनी जेबों में रख लेने को कहते हैं। घाप ताड़ने का दावा करते हैं कि किसकी जेब में कौन-सी चीज है।

भापने की क्रिया इस प्रकार है। जब चीजें जेबों में छिपा ली गयी हों, घाप कमरे में लौटते हैं और हरेक को तस्तरी में से बादाम देते हैं—एक को एक, दूसरे को दो तथा तीसरे को तीन। इसके बाद घाप मित्रों को गिनल निर्देश दे कर कमरे से पुनः बाहर आ जाते हैं। घापकी धनुपरिचिति में घापके मित्र तस्तरी से घोर भी बादाम लें: पैसिल छिपाने वाला मित्र जतने घोर बादाम ले, जितने घाप ने उसे दिये थे; चाबी छिपाने वाला—जितना घाप ने उसे दिया था, उसका चुमुना; छुरी वाला—जितना घापने उसे दिया था, उसका चौमुना।

घापकी बादाम तस्तरी में पड़े रहें।

जब यह सब हो चुका हो और घापको वापस लौटने का संकेत मिल जाये, तब घाप कमरे में आते हैं और तस्तरी पर एक निगाह जाल कर बता देते हैं, किसकी जेब में कौन-सी चीज छिपी है।

जादू बिल्कुल चक्कर में डाल देता है, क्योंकि यह बिना किसी ऐसे सहायक के दिखाया जाता है, जो घापको चुपके-चुपके इशारे से कुछ बता सके। इसमें कोई झूठ या धोखा नहीं है: जादू पूरी तरह से गणितीय कलन पर आधारित है। घाप सिर्फ तस्तरी में बचे बादामों की संख्या के आधार पर चीज छिपाने वाले को भापते हैं। तस्तरी में अधिक बादाम नहीं बचते; सिर्फ 1 से 7 तक बच सकते हैं और घाप उन्हें सिर्फ एक निगाह में गिन सकते हैं। लेकिन बचे बादामों की संख्या से यह कैसे बताया जा सकता है कि किसने क्या छिपा है?

यह बिल्कुल सरल है: मित्रों के बीच चीजों के हर वितरण के लिये तस्तरी में बचे बादामों की संख्या प्रत्यक्ष होगी। यह अभी सिद्ध करेंगे।

माना कि घापके मित्रों के नाम हैं: कंस्टांटीन, गियोर्नी तथा आर्दीमिर। उन्हें क्रमशः क, ग और व अक्षरों द्वारा धोतित करें।

बीजों का नामकरण भी धारों में कर लें: पेंसिल - a , चाबी - b और चाकू - c । कितने प्रकार से तीन वस्तुओं तीन लोगों के बीच वितरित हो सकती है? छः प्रकार से:

क	ग	ब
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

स्पष्ट है कि कोई अन्य स्थिति नहीं हो सकती; हमारी सारणी में मिलसिमेवार से सारे संभव क्रमचय निहित हैं।

अब देखें कि इन छः वितरणों के अनुसृत तस्तरी में बने बादाओं की संख्याएँ क्या होती हैं:

क ग ब	लिये गये बादाओं की संख्या	कुल	बचे बादाओं
$a b c$	$1+1=2$; $2+4=6$; $3+12=15$	23	1
$a c b$	$1+1=2$; $2+8=10$; $3+6=9$	21	3
$b a c$	$1+2=3$; $2+2=4$; $3+12=15$	22	2
$b c a$	$1+2=3$; $2+8=10$; $3+3=6$	19	5
$c a b$	$1+4=5$; $2+2=4$; $3+6=9$	18	6
$c b a$	$1+4=5$; $2+4=6$; $3+3=6$	17	7

आप देखते हैं कि बचे बादाओं की संख्याएँ हर वितरण के लिये अलग हैं। इसीलिये इन संख्याओं के आधार पर आप बता सकते हैं कि कितने क्या लिखा है। आप तीसरी बार कमरे से बाहर निकलते हैं और अपनी पुस्तिका में देखते हैं, जिसमें आपने ऊपर की सारणी उतार रखी है। सारणी में आपको सिर्फ प्रथम तथा अन्तिम स्तम्भों की आव-

मकता पड़ेगी। उन्हें याद कर लेना कठिन है, पर इसकी प्रायश्चित्तता भी नहीं है। यह सारणी घापको बता देगी कि किसकी जेब में कौनसा चीज है। यदि, उदाहरण के लिये, तपतरी में 5 बादाम बने हों, तो इसका अर्थ है वितरण *BCA*:

चाबी - कंस्टांटीन के पास

छूरी - गिथोर्गी के पास

पेंसिल - व्लादीमिर के पास।

जादू के सफल प्रदर्शन के लिये घाप को अच्छी तरह याद होना चाहिये कि घाप ने किसे कितने बादाम दिये थे। बेहतर रहेगा, यदि घाप नामों के प्रकारादि कम से बादाम बाँटे, जैसा कि हमने किया है।

अध्याय 2

खेलों का गणित

डोमिनो*

16. 28 गोटियों की लड़ी. खेल के नियमों का उल्लंघन किये बिना भी डोमिनो की 28 गोटियों को एक सतत लड़ी में क्यों रखा जा सकता है?

17. लड़ी का प्रारंभ और अंत. जब डोमिनो की 28 गोटियों को एक लड़ी में रखा गया, तो एक छोर पर पाँच बिंदे थे।

दूसरे छोर पर कितने बिंदे थे?

18. डोमिनो का जादू. आपका मित्र एक गोटी उठा लेता है और आपसे बाकी बचे 27 गोटियों को एक सतत लड़ी में रखने को कहता है। उसके अनुसार, चाहे जो भी गोटी उसने ली हो, यह करना संभव है। वह दूसरे कमरे में चला जाता है, ताकि आपकी बनायी लड़ी देख न सके। आप काम शुरू करते हैं और जल्द ही मान लेते हैं कि आपका मित्र सही था : 27 गोटियों को एक लड़ी में रखा जा

* डोमिनो 28 आयताकार गोटियों का एक खेल है। गोटी की ऊपरी सतह दो वर्गों में बँटी होती है, जिन पर विभिन्न संख्याओं में 0 से 6 तक के बिंदे होते हैं। खिलाड़ी बराबर संख्या में गोटियाँ ढूँढ लेते हैं और एक-दूसरे से छिपा कर रखते हैं। उनमें से प्रत्येक टेबुल पर बारी-बारी से एक-एक गोटी एक-दूसरे से सटा कर इस प्रकार रखता है कि समान संख्या के बिंदे पास हों (जैसे चित्र 8 में गोटी (2, 6) से गोटी (6, 3) सटी है)। इस प्रकार लड़ी बनती जाती है। जिसकी गोटियाँ पहले खत्म हो जाती हैं, वह जीत जाता है।—अनु०

सकता है। घाप खीर भी घातघर्यवर्जित होते हैं, जब घापका भित्त
 दूसरे कमरे से घापकी लड़ी देखे बिना बताता है कि उस के फित्त
 खीर पर कितने बिंदे हैं।

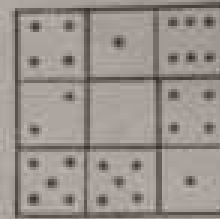
कैसे वह जान लेता है? उसे क्यों विश्वास है कि 27 गोदियों
 की सतत लड़ी बभायी जा सकती है?

19. फ्रेम. चित्र 5 में एक वर्गोकार फ्रेम है, जो खीर के निषमों
 की ध्यान में रखते हुए बंभिनो की गोदियों से बनाया गया है। फ्रेम
 की भुजायें बराबर हैं, पर उनमें बिंदों की कुल संख्यायें समान नहीं
 हैं। ऊपरी तथा निचली कतारों में से हरेक में 44 बिंदे हैं तथा धन्य
 वी कतारों में—59 तथा 32 बिंदे।



चित्र 5

क्या आप ऐसा वर्गाकार फेंम बना सकते हैं, जिसकी प्रत्येक भुजा में बिंदुओं की कुल संख्या 44 हो?



चित्र 6

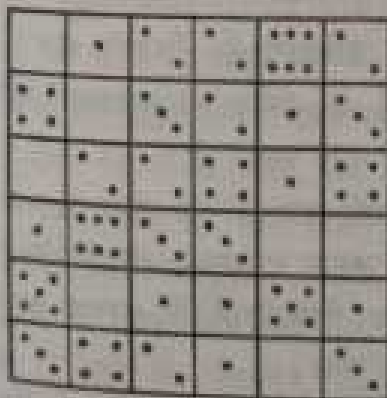
20. सात वर्ग, डोमिनो की चार ऐसी गोटियाँ चुनी जा सकती हैं कि उनमें बने वर्ग की हर भुजा में बिंदुओं की संख्या समान हो।

(नमूना घाप चित्र-6 में देखते हैं: प्रत्येक भुजा में बिंदुओं को गिनें, कुल संख्या हर प्रकार से 11 होगी।)

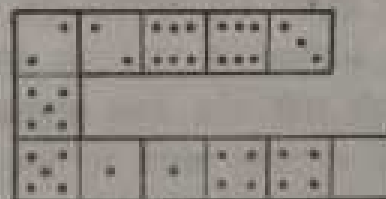
क्या आप डोमिनो की सारी गोटियों को लेकर सात ऐसे वर्ग बना सकते हैं? जरूरी नहीं कि सभी वर्गों की भुजाओं में बिंदुओं की एक ही संख्या हो। पर्याप्त होगा यदि अलग-अलग हर वर्ग की चारों भुजाओं में बिंदुओं की संख्या समान हो।

21. डोमिनो से बने जादूई वर्ग. चित्र-7 में डोमिनो की 18 गोटियों से बना एक वर्ग है, जिसकी घासियत यह है कि प्रत्येक अनुलम्बिक, अनुप्रस्थिक या विकर्णी कतार में बिंदुओं की संख्या एक समान है: 13। ऐसे वर्गों को प्राचीन काल से ही "जादूई" कहा जाता है।

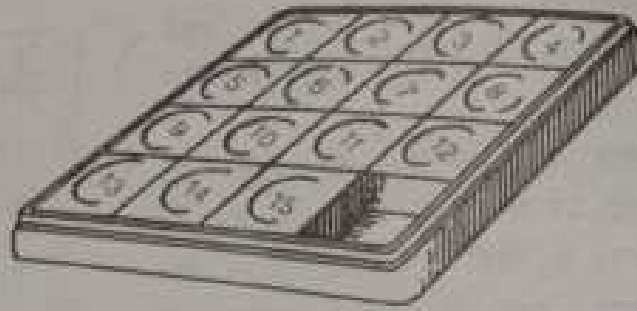
आपसे 18 गोटियों वाले ऐसे ही कुछ वर्ग बनाने का अनुरोध किया जाता है, जिनकी कतारों में बिंदुओं की संख्या भिन्न हो। 18 गोटियों से बने जादूई वर्ग की कतारों में बिंदुओं की निम्नतम संख्या 13 है तथा अधिकतम संख्या 23 है।



चित्र 7



चित्र 8



चित्र 9. 15 का खेल

22. डोमिनो निर्मित श्रेणी. चित्र-8 में चाप डोमिनो की 6 गोटियाँ देखते हैं, जो खेल के नियमानुसार रखे गये हैं। फर्क सिर्फ यह है कि कतार में गोटियों पर बिंदों की संख्याएँ (गोटी के दोनों छद्दों को मिला कर) 1 से बढ़ती है। कतार 4 से शुरू होती है तथा बिंदों की निम्न संख्याओं से बनती है:

4, 5, 6, 7, 8, 9

समान संख्या द्वारा बढ़ने (या घटने) वाली कतार को "समांतर श्रेणी" कहते हैं। हमारी कतार में हर संख्या पिछले से 1 ज्यादा है; पर श्रेणी में कोई भी दूसरा "घातर" हो सकता है।

प्रमाण है कि छे गोटियों से कैसे ऐसी ही कुछ और श्रेणियाँ बनायी जायें।

15 का खेल या टेकेन. 1 से 15 तक अंकित वर्गाकार गोटियों की विख्यात डिब्बी का एक मनोरंजक इतिहास है, जिसकी खेलने वाले शायद कल्पना भी नहीं करते। खेलों के जर्मन अध्ययनकर्ता गणितज्ञ वी० प्रारेंस के शब्दों में यह इतिहास इस प्रकार है:

"लगभग धर्म शताब्दी पूर्व, सातवीं दशाब्दी के अन्त में, संयुक्त राज्य अमेरिका में "15 का खेल" उभरा। उसकी लोकप्रियता तेजी से बढ़ने लगी और अपने असंख्य मुख्द खिलाड़ियों के कारण वह एक यथार्थ सामाजिक संकट का रूप लेने लगा।

"यही स्थिती सागर के इस पार, यूरोप में भी देखने को मिली। यहाँ बर्गियों में भी यात्रियों के हाथ में 15 गोटियों की डिब्बियाँ देखी

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

चित्र 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

चित्र 11

जा सकती थी। दफ्तरों तथा दुकानों के मालिक अपने यहाँ काम करने वालों के इस शोक से परेशान थे और काम के वक़्त खेल पर सक्रमनाही लगाने को विवश हो गये थे। मनोरंजन-गृहों के मालिक इस शक का धूर्ततापूर्वक उपयोग कर रहे थे और बड़ी-बड़ी प्रतियोगितायें आयोजित कर रहे थे।

खेल जर्मन-रेइखस्टाग के आनुष्ठानिक-कक्षों में भी प्रविष्ट हो गया। "बर्गीकार दिवसियों पर टफटकी लगाये बुजुर्ग लोग मेरी आँखों के सामने आज़ भी घूमते हैं," - विख्यात जर्मन भूगोलशास्त्री व गणितज्ञ विगमुन्ड थ्यूटर, जो इस महामारी के समय वहाँ टिपुटी (संसद-सदस्य) थे, यह याद करते हैं।

"पेरिस में इस खेल ने पहले तो खुले आकाश के नीचे बूलवारों में अपना स्थान बनाया, फिर जल्द ही कस्बों और गाँवों तक फैल गया।" सुदूर गाँवों में भी कोई ऐसा घर नहीं बचा था, जहाँ अपने शिकार को जाल में फँसा लेने की धात में यह मकड़ा न बैठा हो", - एक फ़्रांसीसी लेखक ने लिखा था।

"सन 1880 में यह रोग फ़ायद अपने शिखर पर पहुँच गया था। लेकिन जल्द ही इस शैतान पर गणित के अस्त्र से विजय प्राप्त कर लिया गया। गणित के ब्रीढ़-सिद्धांतों ने दिखाया कि खेल के सभी प्रश्नों में से सिर्फ़ आधे का हल संभव है; बाकी का हल किसी भी तरीके से नहीं हो सकता।

"इसने स्पष्ट हो गया कि कुछ प्रकृत तात्व कोशियों के बावजूद यहाँ हल नहीं होते थे और कर्ष प्रतियोगिता के कुछ आयोजक उनके

हल के लिये बड़ी रकमों के इनाम ऐलान करने का साहस करते थे। इनाम रखने में खेल के प्राधिकारक ने सबसे मात कर दिया था। उसने न्यू-यॉर्क के एक सामान्य-पत्र के रविवारीय संस्करण के लिये एक हल न होने वाला प्रकट किया। हल डूड़ने वाले को 1000 डालर मिलने थे। चूंकि संपादक डर रहा था, प्राधिकारक मह राशि अपनी जेब में देने को तैयार हो गया। प्राधिकारक का नाम है सैमुएल (सैम) लायड। उसका नाम मनोरंजक प्रश्नों तथा प्रसंख्य पहेलियों के लिये विख्यात है। मजेश्वर बात है कि अमेरिका में उसे इस खेल के लिये पेटेंट देने से इन्कार कर दिया गया। नियमानुसार इसके लिये उसे खेल का एक "कामगार प्रतिमान" देना था। जब उसने अधिकारियों के समक्ष खेल का एक प्रस्न रखा, तो उन्होंने ने पूछा कि हल संभव है या नहीं। लायड को मानना पड़ा कि गणित के दृष्टिकोण से इसका हल नहीं है। "इस स्थिति में, -उसे उत्तर मिला, -कोई कामगार प्रतिमान नहीं बन सकता और बिना प्रतिमान के पेटेंट नहीं दिया जाता।" लायड इस निर्णय से संतुष्ट हो गया, पर यदि वह पहले जानता कि उसका प्राधि-कार इतना लोकप्रिय हो जायेगा, वह और भी कोशिश करता।"

खेल के इतिहास के बारे में कुछ तथ्यों को प्राधिकारक के शब्दों में प्रस्तुत करते हैं:

"पहेलियों के देश में घसों से जीने वालों को याद होगा - लायड लिखता है, - कि कैसे सातवीं दशाब्दी के प्रारंभ में मैने "15 के खेल" नाम से विख्यात गोटियों की डिब्बी पर सारी दुनिया को घर खपाने के लिये विवश कर दिया था। बर्गाकार डिब्बी में 15 गोटियां सही क्रम में रखी थीं, सिर्फ 14-वीं व 15-वीं गोटियां उल्टे क्रम से रखी हुई थीं (चित्र 11)। समस्या थी: सिलसिले से एक-एक गोटी को खिसका कर उन्हें सही क्रम में रखना, ताकि आखिरी दो गोटियां भी सीधे क्रम में आ जायें।

प्रस्न के सही हल के लिये 1000 डालर का इनाम किली को नहीं मिला, यद्यपि सभी पथक प्रवस्त में लीन थे। कई मजदूर किस्से सुनने को मिले, जैसे दुकानदार इसके चलते अपनी दुकान खोलना भूल जाते थे, कई सम्मानीय प्राधिकारी सड़क पर रोसनी के नीचे उत्तर की खोज में सारी रातें बिता दिया करते थे। कोई भी अपनी कोशिश



चित्र 12. "...किन्सा आदरणीय अधिकारियों का, जो रात-रात भर विजली-खंभों के नीचे रोशनी में मशगूल रहते थे..."

रोशनी को तैयार न था, क्योंकि सभी को सफलता में पूरा विश्वास था। कहते हैं कि जहाजरान इस खेल के चलते जहाजों को छीछने पर बैठा देते थे, इंजन-वालाक रेलगाड़ियों को स्टेशन पर रोकना भूल जाते थे और किसान प्रश्न के हल के पीछे अपना हल-बैल छोड़ देते थे।"

इस खेल के सिद्धांत से पाठकों का एक सरल परिचय कराते हैं। अपने पूर्ण रूप में वह उच्च बीजगणित के एक अध्याय—निश्चयांक-सिद्धांत—से संबंधित है। यहाँ हम सिर्फ बी० आरेंस के कुछ विचारों को प्रस्तुत करते हैं।

"खेल का नियम साधारणतया इस प्रकार है: खाली जगहों पर एक-एक कर 15 मोटियों को बिस्तफाते हुए उन्हें किसी दिने कम से साधारण कम में नापा जाता है। साधारण कम 1 से 15 तक की संख्या का कम है। ऊपर के बायें कोने में 1 का स्थान है, उसके बायें-2 का, फिर 3 का और ऊपर के दाहिने कोने में 4 का। इसके

नीचे की कतार में बाएँ से दाएँ क्रमः 5,6,7,8 के स्थान होते हैं।
इस प्रकार का साधारण क्रम चित्र-10 में दिखाया गया है।

"यदि ऐसी स्थिति की कल्पना कीजिये, जब गोटियों का क्रम पूर्ण रूप से बिगड़ा हुआ हो। गोटियों को खिसका-खिसका कर गोटी 1 को अपनी जगह पर लाया जा सकता है।

इसी तरह, गोटी 1 को छूने बिना, गोटी 2 को अपनी जगह पर लाया जा सकता है। इसके बाद गोटियों 1 व 2 को छूने बिना गोटियों 3 व 4 को अपनी जगह पर लाया जाता है: यदि संयोगवत्ता के घटित दो स्तंभों में नहीं है, तो गोटियों को खिसका कर उन्हें घासानी में इस क्षेत्र में लाया जा सकता है और सक्षम तक पहुँचा जा सकता है। शेष ऊपरी कतार 1,2,3,4 सही हो चुकी है और घाने के प्रयत्नों में उसे नहीं छूते हैं। इसी तरह दूसरी कतार 5,6,7,8 का क्रम ठीक किया जा सकता है; ध्यान देना संभव है कि यह हमेशा संभव है। इसके बाद आखिरी दो कतारों में 9 तथा 13 गोटियों को अपनी जगह पर लाते हैं; यह भी हमेशा संभव है। अपनी जगह पर लायी गयी गोटियों 1,2,3,4,5,6,7,8,9,13 को फिर अपनी जगह से नहीं हटाते। अब 6 जगहें बचती हैं, जिनमें एक खाली है तथा 5 जगहों पर 10,11,12,14,15 गोटियाँ किसी अनिश्चित क्रम में हैं। इन छे जगहों की सीमा में 10,11,12 को हमेशा अपनी जगह पर रखा जा सकता है। उन्हें रख लेने के बाद 14 व 15 गोटियों को या तो सही क्रम में रखा जा सकता है या उल्टे क्रम में (चित्र 11)। पाठक खुद देख सकते हैं कि इससे हम निम्न निष्कर्ष पर पहुँचते हैं:

"गोटियों की किसी भी आरंभिक क्रम-व्यवस्था का या तो चित्र-10 की भाँति पुनरायोजन किया जा सकता है (क्रम-1) या चित्र 11 की भाँति (क्रम-11)।

यदि कोई क्रम-व्यवस्था, संक्षेपण के लिये उसे S कहें, क्रम-1 पर लायी जा सकती है, तो उल्टा उसे 1 से S पर भी लाया जा सकता है, क्योंकि सभी चालें वापस ली जा सकती हैं। उदाहरण के लिये, क्रम-1 में यदि हम गोटी 12 को खाली जगह पर ला सकते हैं, तो उसे उल्टा खिसका कर वापस भी रख सकते हैं।

"इस प्रकार, हमारे पास कुल दो प्रकार की क्रम-व्यवस्थायें हैं:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

चित्र 13

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

चित्र 14

एक को हम साधारण क्रम-1 की तरह रख सकते हैं तथा दूसरी को सिर्फ क्रम-11 की तरह। इसके विपरीत, क्रम-1 से पहली प्रकार की क्रम-व्यवस्थाएँ आयोजित की जा सकती हैं तथा क्रम-11 से सिर्फ दूसरी प्रकार की। और अन्त में, एक ही प्रकार की दो भिन्न क्रम-व्यवस्थाओं को एक-दूसरे की भाँति आयोजित किया जा सकता है।

“क्या किसी प्रचल से इन दो क्रमों-1 तथा 11- को मिलाया नहीं जा सकता? विस्तार में हम नहीं जानेंगे, पर सही-सही सिद्ध किया जा सकता है कि ये दोनों क्रम चारों की किसी भी संख्या से एक दूसरे में परिवर्तित नहीं हो सकते। इसीलिये गोटियों के अपार क्रमचयों को दो समूहों में बाँटा जाता है: 1) वे, जो सही क्रम 1 में परिवर्तित किये जा सकते हैं; इन क्रमचयों को हल किया जा सकता है, तथा 2) वे, जो क्रम-11 में परिवर्तित हो सकते हैं और इसीलिये किसी भी हालत में सही क्रम में नहीं लाये जा सकते: ये ही वे क्रमचय हैं, जिनके हल के लिये बड़े इनामों की घोषणा की जाती थी।

“कैसे जाना जा सकता है कि किसी दिये गये क्रमचय का स्थान पहले समूह में है या दूसरे समूह में? यह एक उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है।

“निम्न प्रकार का एक क्रमचय देखा जाये।

“प्रथम तथा द्वितीय कतारों में गोटियाँ सही रखी हैं; सिर्फ गोटी 9 गोटी 8 की जगह पर है, अर्थात् 9 पहले आता है 8 के; सही क्रम में यह हेर-फेर “घतिक्रमण” कहलाता है। गोटी 9 के बारे में कहते हैं कि यहाँ 1 घतिक्रमण है। इसके बाद की गोटियों में 14 घपनी जगह पर

नहीं है; वह अपने सही स्थान से तीन पर (12,13,11 गोठियों के) पहले है, अतः वहाँ तीन अतिक्रमण हैं (12 के पहले 14; 13 के पहले 14; 11 के पहले 14)। इस प्रकार कुल अतिक्रमण $1+3+4$ होते हैं। इसके प्रतिरिक्त 12-वीं गोठी 11-वीं गोठी के पहले है तथा गोठी 13 गोठी 11 के पहले है। अतः हमें दो और अतिक्रमण मिलते हैं। अतिक्रमणों की कुल संख्या 6 हुई। इसी विधि से पहले नीचे के दाहिने कोने को खाली कर गोठियों की किसी भी क्रमव्यवस्था के लिये अतिक्रमणों की कुल संख्या को बढ़ा जा सकता है। यदि यह संख्या सम है, तो 1 हुई क्रमव्यवस्था को सही क्रम-1 पर लाया जा सकता है, अर्थात् उसका हल देना जा सकता है। यदि अतिक्रमणों की संख्या विषम है, तो क्रमव्यवस्था दूसरे समूह की है, अर्थात् उसका हल नहीं है (सूच्य अतिक्रमण को सम संख्या वाला अतिक्रमण माना जाता है)।

"गणित द्वारा इस स्पष्टीकरण के कारण खेल के पीछे पहले जैसी सतक अब अर्थहीन हो गयी है। गणित इस खेल के लिये पर्याप्त विस्तृत सिद्धांत प्रस्तुत करता है, जो संदेह के लिये कोई गुंजाईश नहीं छोड़ता। यह खेल संयोग पर या खिलाड़ी की क्षमताओं पर निर्भर नहीं करता, जैसा कि दूसरे खेलों में होता है। सिर्फ शुद्ध गणितीय तथ्य हैं, जो पूर्ण वैधता के साथ खेल का पूर्ण निर्धारण करते हैं।"

अब इस खेल के कुछ प्रश्नों को देखें।

खेल के आविष्कारक द्वारा निर्मित कुछ प्रश्न यहाँ दिये जाते हैं, जिनके हल संभव हैं:

23. सायड का पहला प्रश्न. चित्र 11 में दी गयी गोठियों की क्रमव्यवस्था को सही क्रम में परिवर्तित करें। अंत में बायीं ओर का ऊपरी कोना खाली होना चाहिये (चित्र 13)।

24. सायड का दूसरा प्रश्न. चित्र 11 में दी गयी क्रमव्यवस्था के साथ डिब्बी को चौथाई घुमा कर गोठियों को खिसकायें, जबतक कि चित्र 14 की क्रमव्यवस्था न मिल जाय।

25. सायड का तीसरा प्रश्न. चित्र-11 की क्रमव्यवस्था से खेल के नियमानुसार गोठियों को खिसका-खिसका कर डिब्बी को जादुई वर्ग में परिवर्तित कर दें, ताकी हर दिशा में गोठियों की संख्याओं का योग 30 हो।

क्रिकेट

टोमिनो और 15 के खेल के प्रश्नों का अध्ययन करते समय हम सिर्फ प्राकृतिक के दायरे में थे। क्रिकेट के मैदान से संबंधित प्रश्नों को शुरू करने पर हम प्राकृतिक तौर से रेखांकित के क्षेत्र में भी आ जाते हैं।

क्रिकेट-खिलाड़ियों के लिये निम्न पाँच प्रश्न प्रस्तुत हैं।

26. गोल पार करें या क्रिकेट करें? क्रिकेट के गोल-पोस्ट तार से बने आयताकार होते हैं। गोल की चौड़ाई गेंद के व्यास से दुगुनी है। इस हालत में क्या आसान होगा : इष्टतम स्थान से तार को स्पर्श किये बिना गोल से निर्बाध गेंद पार कराना या उसी दूरी से (दूसरी) गेंद पर चोट करना (क्रिकेट करना) ?

27. गेंद और खंभा . क्रिकेट का खंभा नीचे से 6 से० मी० मोटा है। गेंद का व्यास 10 से० मी० है। किसी दूरी से इस खूँटे में चोट करने ("खूँटा चढ़ने") की अपेक्षा गेंद पर चोट करना कितना सरल होगा ?

28. गोल पार करें या खूँटा चढ़ें? आयताकार गोल-पोस्ट से गेंद दुगुना छोटा है और खूँटे से दुगुना चौड़ा है। क्या आसान होगा : किसी इष्टतम स्थान से गोल पार कराना या उसी दूरी से खूँटा चढ़ना ?

29. चूहेदानी पार करें या क्रिकेट करें? आयताकार गोल की चौड़ाई गेंद के व्यास से तिगुनी अधिक है। क्या आसान होगा : इष्टतम स्थान से चूहेदानी पार करना या क्रिकेट करना ?

30. दुर्गम चूहेदानी . आयताकार गोल-पोस्ट की चौड़ाई तथा गेंद के व्यास की लंबाई के किस अनुपात पर चूहेदानी पार करना असंभव हो जायेगा ?

16-30 प्रश्नों के हल

16. समस्या को आसान बनाने के लिये पहले समान बिंदों वाली 0-0, 1-1, 2-2 आदि 7 गोठियों को अलग रख दें। बचेगी 21 गोठियाँ, जिन पर बिंदों की हर संख्या 6 बार मिलती है। उदाहरण के लिये, 4 बिंदे (गोठों के एक घेरे में) निम्न 6 गोठियों पर मिलेंगे :

4-0, 4-1, 4-2, 4-3, 4-5, 4-6.

इस प्रकार बिंदों की हर संख्या सम संख्या बार मिलता है। स्पष्ट है कि समान बिंदों वाले सड़ों को सटा कर इन सारी गोटियों को एक के बाद एक लड़ी में रखा जा सकता है। यह कर लेने के बाद, अर्थात् 21 गोटियों की एक सतत लड़ी बना लेने के बाद, 0-0, 1-1, 2-2 आदि जोड़ी के बीच लड़ी तोड़ कर सात गोटियाँ क्रमशः घुसा कर रख देते हैं। इस प्रकार, खेल के नियमों का उल्लंघन किये बनीर डोमिनो की 28 गोटियों को एक सतत लड़ी में जोड़ा जा सकता है।

17. यह सिद्ध करना आसान है कि डोमिनो की 28 गोटियों से बनी लड़ी के दोनों छोरों पर बिंदों की संख्याएँ समान होंगी। अगर ऐसा नहीं होता, तो छोरों पर स्थित बिंदों की संख्याएँ विषम संख्या बार मिलती (लड़ी के भीतर बिंदों की सभी संख्याएँ सम बार ही मिल सकती हैं!); पर हम जानते हैं कि डोमिनो की सारी गोटियों को जमा कर लेने पर बिंदों की हर संख्या 8 बार, अर्थात् सम संख्या बार दुहरायी जाती है। अतः हमारी यह मान्यता—कि लड़ी के छोरों पर बिंदों की संख्याएँ भिन्न हैं—गलत होगी: वे सिर्फ समान ही सकती हैं। (गणित में इस प्रकार के तर्क को "विपरीत से सिद्ध" कहते हैं।)

धभी-धभी सिद्ध किये गये गुण से एक मनोरंजक निष्कर्ष निकलता है: 28 गोटियों की लड़ी के छोरों को मिला कर हमेशा ही एक घेरा बना दिया जा सकता है। डोमिनो की सभी गोटियों से खेल के नियमों का पालन करते हुए सिर्फ लड़ियाँ ही नहीं, बल्कि बन्द घेरे भी बनाये जा सकते हैं।

पाठक शायद इस प्रश्न में रुचि ले: कितनी भिन्न विधियों से इस प्रकार की लड़ी या घेरा बनाया जा सकता है? यहाँ कलन के नीरस विस्तार को छोड़ कर यह बता दें कि 28 गोटियों की लड़ियाँ या घेरे बनाने की विधियों की संख्या बहुत बड़ी है: 7 ट्रिलियन (70 खरब) से अधिक। यह रही उनकी सही संख्या:

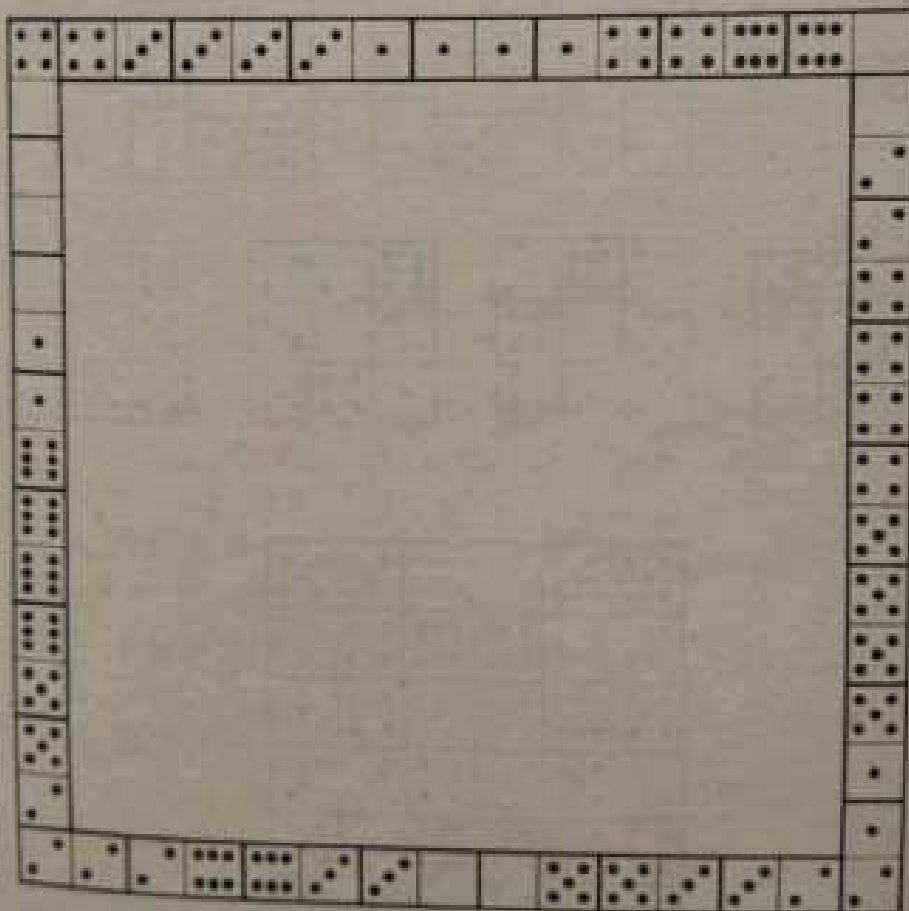
7 959 229 931 520

(यह संख्या निम्न गुणकों का गुणनफल है: $2^{13} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$) ।

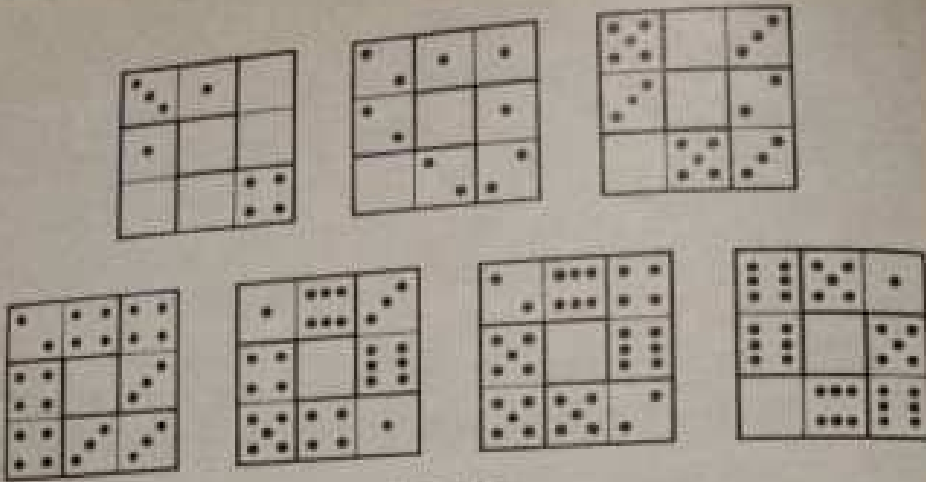
18. इस पहेली का हल उपरोक्त बातों की मदद से मिलता है। हम जानते हैं कि डोमिनो की 28 गोटियों से हमें एक बंद घेरा बनाया जा सकता है। अतः यदि इस घेरे से एक गोटी उठा लें, तो

- 1) बाँकी 27 गोटियाँ खुले छोरों वाली एक सतत लड़ी बनायेंगी ;
- 2) छोरों पर बिन्दुओं की संख्याएँ वही होंगी, जो उठायी गयी गोटी पर हैं।

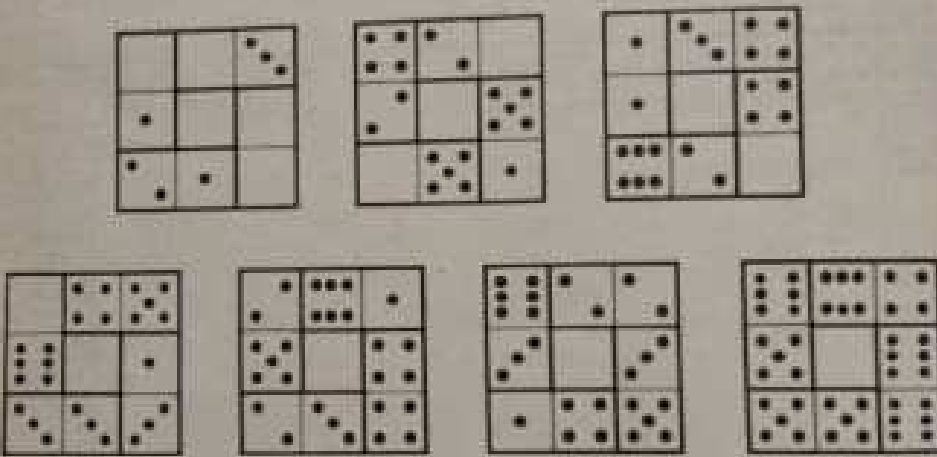
इसीप्रकारे एक गोटी छिपा कर हम पहले से बता सकते हैं कि बाँकी 27 गोटियों की लड़ी के छोरों पर बिन्दुओं की कौनसी संख्याएँ होंगी।



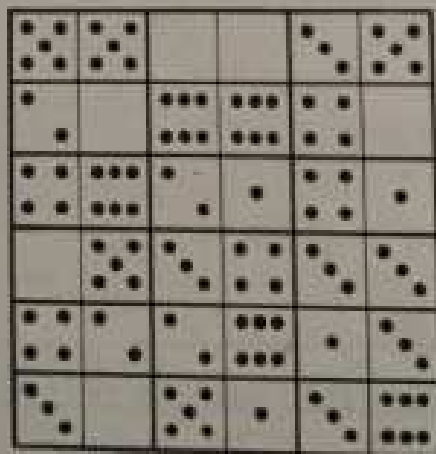
चित्र 15



चित्र 16



चित्र 17



चित्र 18

19. एक वर्ग की सभी भुजाओं पर बिंदुओं की कुल संख्या $44 \times 4 = 176$ होनी चाहिये, पर यह संख्या डॉमिनो की सभी गोठियों पर के बिंदुओं की कुल संख्या 168 से 8 अधिक है। इसका कारण है कि वर्ग के शीर्षों पर के बिंदु दो बार गिनती में आते हैं। इससे पता चलता है कि वर्ग के शीर्षों पर बिंदुओं की कुल संख्या 8 होनी चाहिये। यह समस्या को कुछ घासान बना देता है, फिर भी ऐसा वर्ग बनाना काफी बटिल है। उत्तर चित्र 15 में दिया गया है।

20. इस प्रश्न के अनेक संभव संघानों में से हम दो हल दे रहे हैं। पहले हल (चित्र 16) में है:

1	वर्ग,	जिसकी	हर	भुजा	में	3	बिंदु	हैं
1	»	»	»	»	»	6	»	»
1	»	»	»	»	»	8	»	»
2	»	»	»	»	»	9	»	»
1	»	»	»	»	»	10	»	»
1	»	»	»	»	»	16	»	»

दूसरे हल में (चित्र 17)

2	वर्ग,	जिसकी	हर	भुजा	में	4	बिंदु	हैं
1	»	»	»	»	»	8	»	»
2	»	»	»	»	»	10	»	»
2	»	»	»	»	»	12	»	»

21. चित्र 18 में जादूई वर्ग का एक नमूना दिया गया है, जिसकी हर कतार में 18 बिंदु हैं।

22. उदाहरण के रूप में 2 समांतर वाली दो श्रेणियाँ प्रस्तुत हैं:

a) 0—0; 0—2; 0—4; 0—6; 4—4; (या 3—5); 5—5 (या 4—6)

b) 0—1; 0—3; (या 1—2); 0—5 (या 2—3); 1—6 (या 3—4); 3—6 (या 4—5; 5—6);

6 गोठियों की मदद से 23 श्रेणियाँ बनायी जा सकती हैं। उनकी पहली गोठियाँ निम्न होंगी:

a) एक समांतर वाली श्रेणियों के लिये:

0-0	1-1	2-1	2-2	3-2
0-1	2-0	3-0	3-1	2-4
1-0	0-3	0-4	1-4	3-5
0-2	1-2	1-3	2-3	3-4

b) दो सर्वांतर वाली खेड़ियों के लिये ;

0-0; 0-2; 0-1

23. प्रारंभिक कम-व्यवस्था से दृष्ट कम निम्न 44 बालों में प्राप्त किया जा सकता है :

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
 10, 6, 2, 1.

24. दृष्ट कम-व्यवस्था निम्न 39 बालों में प्राप्त की जाती है :

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

25. 30 योगफल वाला जादूई वर्ग निम्न बालों में प्राप्त किया जाता है :

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

26. अनुभवही खिलाड़ी भी जापद यही कहेगा कि दो गमी स्थिति में क्रिकेट की प्रवेश गोल पार करना अधिक आसान है, क्योंकि गोल-पोस्ट गेद से दुगुना चौड़ा है। पर यह सोचना गलत होगा। गोल

निस्संदेह गेंद से दुगुना चौड़ा है, पर गोल से होकर निकलने के लिये निर्बाध रास्ता क्रोकिंग के लक्ष्य से दो गुणा कम चौड़ा है।

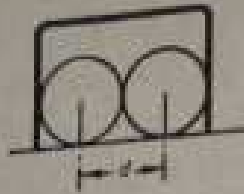
चित्र 19 को देखने पर बात स्पष्ट हो जाती है। गेंद का केंद्र अपनी खिज्या से कम दूरी पर गोल के तारों के समीप नहीं आ सकता, यद्यपि गेंद तारों को स्पर्श करेगा। अर्थात् गेंद के केंद्र का लक्ष्य गोल की चौड़ाई से दो खिज्या कम है। अतः हमारे प्रश्न की शर्तों के अनुसार इष्टतम स्थान से भी गोल पार करने के लिये गेंद का लक्ष्य गेंद के व्यास इतना ही चौड़ा है।

अब देखें कि क्रोकिंग के लिये गतिमान गेंद के केंद्र का लक्ष्य कितना चौड़ा है। स्पष्ट है कि यदि क्रोकिंग करने वाले गेंद का केंद्र क्रोकिंग होने वाले गेंद के पास से अपनी खिज्या से कम दूरी पर गुजरेगा, तो टकराव अवश्यंभावी है। अतः इस हालत में लक्ष्य का विस्तार, जैसा कि चित्र-20 में दिखाया गया है, गेंद के दो व्यासों के बराबर है।

इस प्रकार, खिलाड़ियों के कहने के बावजूद, दी गयी स्थिति में इष्टतम स्थान से भी गोल पार कराने की अपेक्षा क्रोकिंग करना दुगुना सहज है।

27. ऊपर के स्पष्टीकरण के बाद इस प्रश्न के हल को अधिक समझाने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी। आसानी से देखा जा सकता है (चित्र 21) कि क्रोकिंग का लक्ष्य गेंद के व्यास से दुगुने विस्तार वाला है, अर्थात् 20 से० मी० चौड़ा है। खूटे पर चोट करने के लिये लक्ष्य का विस्तार खूटे तथा गेंद के व्यासों के योग के बराबर, अर्थात् 16 से० मी० होगा। अतः खूटा चढ़ने की अपेक्षा क्रोकिंग करना $20 : 16 = 1\frac{1}{4}$ गुना या सिर्फ 25% अधिक सहज होगा। खिलाड़ी प्रकृति क्रोकिंग की अपेक्षा खूटे पर चोट की संभावना को अधिक मानते हैं।

28. कोई खिलाड़ी इस प्रकार भी सोच सकता है: यदि गोल-पोस्ट की चौड़ाई गेंद से दुगुनी अधिक है और खूटा गेंद से दो गुना कम चौड़ा है, तो खूटे पर चोट करने के लक्ष्य से गोल पार कराने का लक्ष्य चौगुने विस्तार वाला है। पिछले प्रश्नों को समझ लेने के बाद पाठक ऐसी गलतियाँ नहीं करेगा। वह समझ लेगा कि खूटे पर निश्चाना



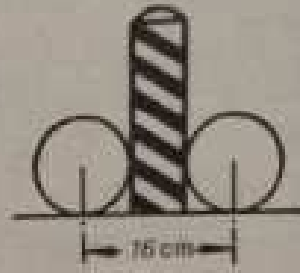
चित्र 19



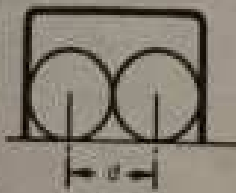
चित्र 20



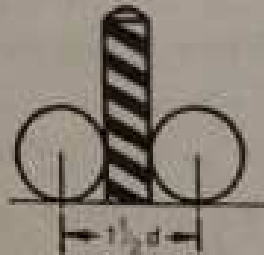
चित्र 21



चित्र 22



चित्र 23



चित्र 24



चित्र 25



चित्र 26



चित्र 27

उपरोक्त के लिये लक्ष्य इष्टतम स्थान से गोल पार कराने के लक्ष्य से $\frac{1}{2}$ गुना अधिक चौड़ा है। यह चित्र 23 तथा 24 को देखने से स्पष्ट हो जाता है।

(यदि गोल-पोस्ट का आकार प्रायतः सा नहीं, बल्कि मेहराब का होता, तो निर्बाध पार करने के लिये गेंद को धीरे कम जगह मिलती, उसका लक्ष्य धीरे संकुचित होता। यह चित्र 25 में बिल्कुल स्पष्ट है।)

29. चित्र 26 व 27 में देखा जा सकता है कि गेंद के केंद्र को निर्बाध पार कराने के लिये बना हुआ अंतराल a प्रश्न की शर्तों के अनुसार काफी संकीर्ण है। रेखागणित से परिचित लोग जानते हैं कि वर्ग की भुजा AB उसके कर्ण AC से लगभग 1.4 गुना कम होती है।

यदि गोल की चौड़ाई $3d$ हो (जहाँ d —गेंद का व्यास है), तो AB बराबर होगा

$$3d : 1.4 \approx 2.1d \text{ के।}$$

अंतराल a , जो इष्टतम स्थान से चूहेदानी पार करने वाले गेंद के केंद्र का लक्ष्य है, धीरे भी संकरा है। वह AB से पूरे एक व्यास के बराबर कम है, अर्थात्

$$a = 2.1d - d = 1.1d$$

चूकि क्रोकिंग करने वाले गेंद का लक्ष्य, जैसा कि हम जानते हैं, $2d$ है, दी गयी स्थिति में चूहेदानी पार करने से क्रोकिंग करना दुगुना सरल है।

30. चूहेदानी उस स्थिति में बिल्कुल सुगम हो जाती है, जब गोल की चौड़ाई गेंद के व्यास के 1.4 गुना से कम हो। यह निष्कर्ष पिछले प्रश्न में समझायी गयी बातों से निकलता है। यदि गोल-पोस्ट प्रायतः आकार न हो कर मेहराबी हो, तो पार करने की स्थिति धीरे भी बुरी हो जाती है।

अध्याय 3

दर्जन भर और पहलियां

31. डोरी :— और डोरी चाहिये?— माँ ने कपड़े धोने की बाल्टी से हाथ निकालते हुए पूछा।— मैं क्या डोरी का बंडार हूँ? जब देखो, डोरी की माँग! कम ही तो मैंने एक बड़ा घंटा दिया था तुम्हें। क्या करोगे इतनी डोरी का? घंटा कहाँ गया?

— घंटा कहाँ गया?— बच्चे ने उत्तर दिया— पहले तो उसका घाधा तुमने खुद वापस ले लिया...

— तो मैं कपड़ों के बंडल किस चीज से बाँधती?

— बाकी का घाधा टोन ने ले लिया, उसे गड़हे में मछली पकड़नी थी।

बड़े भाई को जरूर देनी चाहिये।

— मैंने दे भी दिया। थोड़ा सा बचा था, उसमें से घाधा पापा ने गैलिस मरम्मत करने के लिये ले लिया, जो कार के साथ दुर्घटना के वक्त उनकी हँसी से टूट गया था। इसके बाद बहन को अपने बाल बाँधने के लिये डोरी की जरूरत पड़ी और उसने बाकी का 2/5 हिस्सा ले लिया...

— और बाकी डोरी का क्या किया तुमने?

— बाकी का? 30 से० मी० ही तो बची थी। इस टुकड़ी से भी कहीं टेलीफोन बन सकता है...

डोरी शुरू में कितनी लंबी थी?

* यह पहली संशोधन उपन्यासकार बेरी पेन द्वारा रचित है।

32. जुराबें घोर दस्ताने. एक डब्बे में 10 जोड़ियाँ सूरी जुराबें तथा 10 जोड़ियाँ काली जुराबें थीं। दूसरे डब्बे में दस जोड़े भूरे दस्ताने तथा 10 जोड़े काले दस्ताने थे। दोनों डब्बों में से कितनी जुराबें घोर दस्ताने निकालने काफ़ी होंगे कि कितनी एक रंग की एक जोड़ी जुराबें घोर एक जोड़ा दस्ताने चुने जा सकें?

33. बालों का जीवन-काल. घादमी के सिर पर औसतन कितने बाल होते हैं? गिना गया है: लगभग 150000।* यह भी निर्धारित किया गया है कि महीने में गिरने वाले बालों की औसत संख्या 3000 है।

इन तथ्यों के आधार पर एक बाल का औसत जीवन-काल कैसे निर्दिष्ट किया जा सकता है?

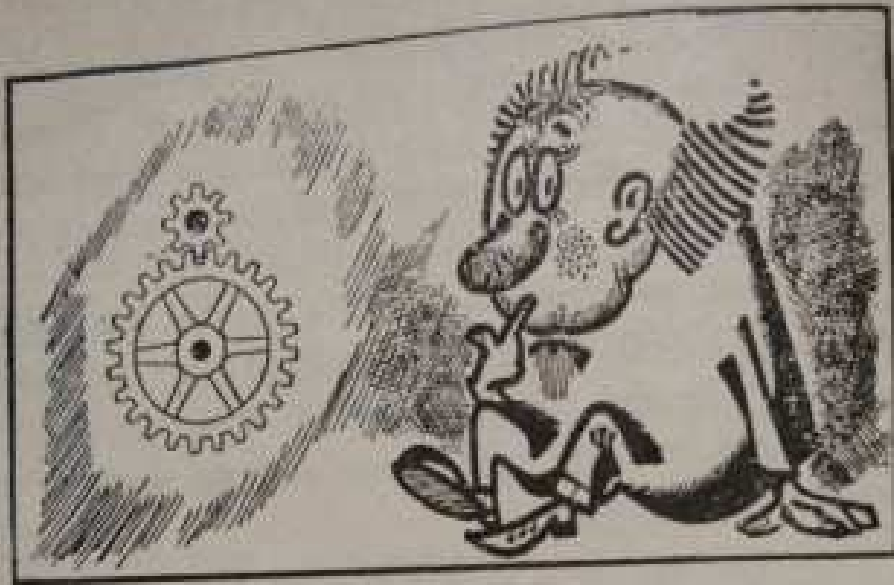
34. तनस्वाह. पिछले महीने घोवर-टाइम मिला कर मुझे 130 रुबल मिले। इसमें मुख्य वेतन घोवर-टाइम की भुगतान से 100 रुबल अधिक है। बिना घोवर-टाइम के मेरा वेतन कितना है?

35. स्कीइंग. स्की करने वाले ने हिसाब लगा कर देखा कि यदि वह 10 कि० मी० प्रति घंटे की दर से चले, तो निर्धारित स्थान पर दोपहर के एक घंटा बाद पहुँचेगा और यदि 15 कि० मी० प्रति घंटे चले, तो दोपहर से एक घंटा पहले पहुँचेगा। ठीक दोपहर को पहुँचने के लिये उसकी गति क्या होनी चाहिये?

36. दो मजदूर. दो मजदूर—एक जवान और एक बूढ़ा—एक ही जर्नेट में रहते हैं। जवान को घर से कारखाने तक पैदल जाने में 20 मिनट लगते हैं और बूढ़े को—30 मिनट। यदि बूढ़ा 5 मिनट पहले घर से निकल जाये, तो जवान उसे कितने मिनट बाद पकड़ लेगा?

37. रिपोर्ट टाइप करना. दो टाइपिस्टों को एक रिपोर्ट टाइप

* बहुत से लोगों को आश्चर्य होता है कि यह कैसे निर्धारित किया गया है: क्या एक-एक बाल गिने हैं? नहीं, ऐसा नहीं करते। सिर की सतह के एक वर्ग से० मी० में कितने बाल हैं—यह गिना जाता है। प्राप्त संख्या को सिर के पूरे सतह के क्षेत्र-फल से गुणा कर दिया जाता है। यूँ कहें कि शरीर-रचना के वैज्ञानिक बालों की संख्या उसी तरह निर्धारित करते हैं, जैसे वनपाल वन में पेड़ों की संख्या निर्धारित करते हैं।



चित्र 28. दंतचक्रकी कितने चक्कर लगायेगी ?

करने के लिये दिया गया है। अधिक अनुभवी टाइपिस्ट उसे दो घंटों में टाइप कर सकती है और कम अनुभवी 3 घंटों में।

दोनों मिलकर उसे कितने समय में छापेंगे, यदि वे रिपोर्ट को छापस में इस प्रकार बाँट लें कि कम से कम समय में टाइप हो जाये।

यह प्रश्न हीज में पानी भरने से संबंधित प्रश्नों की तरह हल किया जाता है: पहले निकालते हैं कि एक घंटे में काम का कौन सा अंश हर टाइपिस्ट पूरा करती है। इन दोनों अंशों को जोड़ते हैं और योगफल से 1 में भाग दे देते हैं। क्या आप इसके अतिरिक्त कोई अन्य विधि सोच सकते हैं?

38. दंतदार चक्के. 24 दाँतों वाले एक चक्के के साथ 8 दाँतों वाला एक चक्का फँसा कर इस प्रकार रखा गया है कि बड़े दंत-चक्र के घुमने पर छोटा भी घुमने लगता है। (चित्र 28)

प्रश्न है: बड़े दंत-चक्र के चारों ओर एक बार घुमने के दरमियान छोटा कितनी बार अपनी धुरी पर घूम जायेगा?

39. कितनी उम्र? पहिलियों के एक शौकीन से उसकी उम्र के बारे में पूछा गया, तो उसने बताया:

तीन साल बाद मेरी उम्र के तिगुने में से तीन साल पहले मेरी उम्र का तिगुना घटा भीजिये, आपको मेरी उम्र ज्ञात हो जायेगी।

क्या उम्र है उसकी?

40. इवानोव परिवार.—इवानोव की क्या उम्र है?

—साइने सोचते हैं। 18 साल पहले उम्र में वह अपने पुत्र से तिगुना बड़ा था। मुझे थाल्डी तरह याद है, क्योंकि उस साल जनगणना हो रही थी।

—पर मुझे जहाँ तक ज्ञात है, अभी उसकी उम्र उसके बेटे की उम्र से दुगुनी है। यह क्या दूसरा पुत्र है?

—नहीं, उसे सिर्फ एक ही लड़का है और इसीलिये उसकी उम्र निर्धारित करना कठिन नहीं होगा।

कितनी उम्र है उसकी, पाठक?

41. घोल तैयार करना. एक घणांकित ग्लास में थोड़ा नमकाम्ल है तथा दूसरे में उतना ही पानी है। घोल तैयार करने के लिये पहले ग्लास में दूसरे में 20 ग्राम घम्ल डालते हैं, फिर दूसरे ग्लास में बने घोल का दो तिहाई भाग पहले ग्लास में डाल देते हैं। इसके फलस्वरूप पहले ग्लास में दूसरे ग्लास से चौगुना अधिक द्रव बच जाता है। कितना पानी और कितना घम्ल शुरू में लिया गया था?

42. खरीददारी. जब मैं सामान खरीदने के लिये घर से निकला, तो बटुए में रुबलों और 20 कोपेक के सिक्कों के रूप में लगभग 15 रुबल थे। नोट कर मैंने पाया कि बटुए में एक-एक रुबलों की संख्या उतनी है, जितने पहले 20 कोपेक के सिक्के थे और 20 कोपेक के सिक्के उतने हैं, जितने पहले रुबलों के नोट थे। जितने पैसे लेकर मैं चला था, उसका एक तिहाई बचा था।

कितने का सामान खरीदा मैं ने?

31—42 प्रश्नियों के हल

31. बाघी डोरी माँ को देने पर $\frac{1}{2}$ बचती है; भाई को देने के बाद $-\frac{1}{4}$; पिता को देने के बाद $-\frac{1}{8}$, बहन को देने के बाद $-\frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$ । यदि 30 से० मी० पूरी लंबाई का $\frac{3}{40}$ है, तो पूरी लंबाई होगी $:30 : \frac{3}{40} = 400$ से० मी० या 4 मी०।

32. तीन बुराबें निकालना काफी होगा, क्योंकि उनमें से दो हमेशा एक रंग के होंगे। दस्तानों की संख्या बताना कठिन है, क्योंकि वे सिर्फ रंगों में ही भिन्न नहीं हैं। बाएँ दस्ताने बायें हाथ के लिये हैं और बाएँ दायें हाथ के लिये। यहाँ 21 दस्ताने निकालने पड़ेंगे। इसके कम, जैसे 20, निकालने पर हो सकता है कि सभी एक ही हाथ के लिये हैं (जैसे सिर्फ बायें हाथ के लिये 10 भूरे दस्ताने तथा 10 काले दस्ताने)।

33. सबसे अंत में वही बाल गिरेगा, जो सबसे युवा होगा, अर्थात् जिसकी उम्र 1 दिन की है।

एब देखते हैं कि कब उसके गिरने की बारी आवेगी। पहले महीने में 150000 बालों में से 3 हजार बाल गिर जायेंगे, दो महीनों में 6 हजार, एक साल के दरमियान - 12 गुणा 3 हजार, अर्थात् 36 हजार। चार साल से कुछ अधिक समय बीत जायेंगे जब आखिरी बालों की बारी आवेगी। इस प्रकार प्रादमी के सर के बालों की औसत उम्र निर्धारित की गयी है - 4 वर्षों से कुछ अधिक।

34. बहुत से लोग बिना अच्छी तरह सोचे उत्तर देते हैं: 100 रुबल। यह गलत है, क्योंकि इस हालत में वेतन ओवर-टाइम की भुगतान से सिर्फ 70 रुबल अधिक होगा।

प्रश्न इस प्रकार हल किया जाता है। हम जानते हैं कि ओवर-टाइम की भुगतान में 100 मिला देने पर मुख्य वेतन की रकम प्राप्त होती है। अतः 130 रुबल (मुख्य वेतन + ओवर-टाइम) में 100 रुबल मिला देने पर दो मुख्य वेतनों की राशि ज्ञात होती है। पर $130 + 100 = 230$ । अतः बिना ओवर-टाइम के एक मुख्य वेतन की राशि 115 रुबल हुई। ओवर-टाइम का भुगतान 130 में से 115 घटाने पर 15 रुबल होता है।

उत्तर आँचले हैं: मुख्य वेतन 115 रुबल ओवर-टाइम के भुगतान 15 रुबल से 100 रुबल अधिक है - प्रश्न की शर्त पूरी हो गयी।

35. प्रश्न दो दृष्टिकोणों से रोचक है। पहला, प्रश्न यह विचार उत्पन्न करता है कि दृष्ट गति 10 कि० मी० तथा 15 कि० मी० प्रति घंटे की गतियों का औसत, अर्थात् $12\frac{1}{2}$ कि० मी० प्रति घंटे की

है। देखना आसान है कि यह विचार गलत है। माना कि रास्ते की लंबाई a किलोमीटर है। इस दूरी को वह 15 कि० मी०/घ० की गति से $\frac{a}{15}$ घंटे में तय करेगा, 15 कि० मी०/घ० की रफ्तार से $\frac{a}{10}$ घंटे में तथा $12\frac{1}{2}$ कि० मी०/घ० की गति से $\frac{a}{12\frac{1}{2}}$ या $\frac{2a}{25}$ घंटे में। यदि हमारी मान्यतायें सही हैं, तो निम्न समीकरण सही होना चाहिये:

$$\frac{2a}{25} - \frac{a}{15} = \frac{a}{10} - \frac{2a}{25}$$

क्यों कि इनमें से प्रत्येक घंटे 1 घंटे का है। दोनों तरफ a काट देने पर:

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{2}{25}$$

$$\text{या } \frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$$

अर्थात् गलत समीकरण प्राप्त होता है, क्योंकि $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$ अर्थात् $\frac{4}{24}$; जबकि इसे $\frac{4}{25}$ होना चाहिये था।

प्रश्न की दूसरी विशेषता यह है कि उसे बिना समीकरण की मदद लिये मुजबानी भी हल कर सकते हैं।

हम निम्न प्रकार से सोचें: स्की करने वाला यदि 15 कि० मी०/घ० की चाल से 2 घंटे अधिक चलता (अर्थात् उतने समय तक, जितना 10 कि० मी०/घ० की चाल से चलता), तो वह वास्तविक दूरी से 30 कि० मी० अधिक की दूरी तय करता। चूंकि वह 1 घंटे में 5 कि० मी० अधिक चलता है, 30 कि० मी० अधिक चलने में उसे कुल $30 : 5 = 6$ घंटे लगते हैं। अतः 15 कि० मी०/घ० की चाल से इष्ट स्थान पर पहुंचने में उसे $6 - 2 = 4$ घंटे लगते हैं। इस से इष्ट स्थान की दूरी भी ज्ञात हो जाती है: $15 \times 4 = 60$ कि० मी०।

अब यह ज्ञात करना आसान है कि स्की करने वाले को किस गति से चलना चाहिये कि वह ठीक दोपहर को इष्ट स्थान पर पहुंचे, अर्थात् उसे 5 घंटे चलना पड़े:

$$60 : 5 = 12 \text{ कि० मी०/घ०}$$

जांच कर भासानी से देखा जा सकता है कि उत्तर सही है।

36. प्रश्न बिना समीकरण की मदद से विभिन्न तरीकों द्वारा हल हो सकता है।

पहली विधि इस प्रकार है: जवान मजदूर 5 मिनट में रास्ते को $\frac{1}{4}$ दूरी तय करता है, बूढ़ा मजदूर $\frac{1}{6}$ दूरी तय करता है, अर्थात्

जवान मजदूर से $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ दूरी कम चलता है।

यदि बूढ़ा मजदूर $\frac{1}{6}$ दूरी तय कर चुका है, तो जवान उसे

$$\frac{1}{6} \div \frac{1}{12} = 2$$

दो-मिनटों अंतराल, अर्थात् 10 मिनट में पकड़ लेगा।

दूसरी विधि थोर भी सरल है। पूरा रास्ता तय करने में बूढ़ा जवान से 10 मिनट अधिक व्यय करता है। यदि बूढ़ा 10 मिनट पहले निकलता तो दोनों एक साथ कारखाने पर पहुँचते। पर बूढ़ा 5 मिनट पहले निकलता है, अतः जवान उसे आधे रास्ते में, अर्थात् 10 मिनट में पकड़ लेगा (जवान को पूरा रास्ता तय करने में 20 मिनट लगते हैं)।

37. समस्या का अनीपचारिक हल इस प्रकार है। पहले हम यह प्रश्न रखते हैं: दोनों टाइपिस्ट काम को आपस में किस प्रकार बाँटें कि दोनों का काम एक ही समय में खत्म हो? (स्पष्ट है कि न्यूनतम समय में काम तभी पूरा किया जा सकता है, जब दोनों में से कोई भी खाली न बैठे।) अनुभवी टाइपिस्ट दूसरी से $1\frac{1}{2}$ गुना जल्द काम करती है, अतः एक साथ काम खत्म करने के लिये अनुभवी टाइपिस्ट को $1\frac{1}{2}$ गुना अधिक काम लेना चाहिये। इससे निष्कर्ष निकलता है कि पहली को काम का $\frac{2}{3}$ भाग लेना चाहिये और दूसरी को $\frac{1}{3}$ ।

प्रश्न लगभग हल हो चुका है। सिर्फ यह ज्ञात कर लें कि पहली को काम का अपना $\frac{2}{3}$ हिस्सा पूरा करने में कितना समय लगाना पड़ेगा। पूरा काम वह दो घंटों में करती है, अतः $\frac{2}{3}$ काम $2 \times \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ घंटे में खत्म कर लेगी। दूसरी टाइपिस्ट भी इतने ही समय में अपने हिस्से का काम खत्म करती है।

इस प्रकार, दोनों टाइपिस्टों द्वारा काम खत्म करने का न्यूनतम समय 1 घंटा 12 मिनट है।



चित्र 29. स्थिर सिक्के का चक्कर लगाते हुए दूसरा सिक्का एक बार नहीं, दो बार चक्कर खा चुकेगा।

हल की दूसरी विधि भी दी जा सकती है। पहली टाइपिस्ट 6 घंटे में 3 रिपोर्ट छाप सकती है (प्रभात रिपोर्ट के पृष्ठों से तिगुना अधिक पृष्ठ छाप सकती है) और दूसरी इसी अवधि में 2 रिपोर्ट छाप सकती है। दोनों मिलकर 6 घंटों में 5 रिपोर्ट छाप सकती हैं। अतः 1 रिपोर्ट के लिये उन्हें मिलकर 6 घंटों से पाँच गुना कम समय काम करना होगा, अर्थात् उन्हें आवश्यकता है 6 घंटे : 5 = 1 घंटा 12 मिनट की।

38. यदि आप सोचते हैं कि छोटा दंति-चक्र तीन बार घूमेगा, तो आप गलत हैं: वह तीन नहीं चार चक्करे लगायेगा।

यह देखने के लिये कि क्या बात है, एक चिकने कागज पर चित्र-29 की भाँति दो समान (जैसे 20 कोपेक के) सिक्के रख लें। निचले सिक्के को उंगली से दबा कर दूसरे सिक्के को उसके किनारों पर मुड़काते हुए घुमायें। आपको एक नयी बात का पता चलेगा: जब ऊपर का सिक्का नीचे के सिक्के के निचले किनारे को स्पर्श करेगा, वह एक पूरा चक्कर लगा चुका होगा। यह सिक्के पर संख्या 20 की स्थितियों से देखा जा सकता है। निचले सिक्के के चारों तरफ घूमने पर ऊपरी सिक्का दो पूरे चक्करे लगा लेगा।

जब भी कोई ग्रह (पिण्ड) अपनी धुरी पर घूमता हुआ वृत्त पर चक्कता है तो वह प्रत्यक्ष विधियों से प्राप्त घूर्णन-संख्या से अपनी धुरी पर 1 बार अधिक घूमता है। इसी कारण पृथ्वी सूर्य के चारों ओर एक बार घूमते वक़्त अपनी धुरी पर $365\frac{1}{4}$ बार नहीं, बल्कि 366 बार घूम जाती है (यदि घूर्णनसंख्या सूर्य के सापेक्ष नहीं, तारों के सापेक्ष गिनी जाये)। अब ध्यान समझते हैं कि तारक-दिवस क्यों सूर्य-दिवसों से छोटे होते हैं।

39. एक गणितीय हल काफी पेचीदा है। पर यदि बीजगणित की मदद से समीकरण बनाया जाये तो अत्यंत सरल है। माना कि उम्र x वर्ष है, जिसे सुझा है। तीन साल बाद उम्र होगी $x+3$ और तीन साल पहले $(x-3)$ वर्ष। समीकरण होगा:

$$3(x+3) - 3(x-3) = x$$

हल करने पर $x = 18$ । पहेलियों के शौकीन की उम्र है 18 वर्ष।

उत्तर की जाँच करें: तीन साल बाद उसकी उम्र होगी 21 वर्ष तथा तीन साल पहले उसकी उम्र थी 15 वर्ष। उनके तिगुनों का अंतर

$$3 \cdot 21 - 3 \cdot 15 = 63 - 45 = 18$$

वर्ष हमारे पहेलियों के शौकीन की वर्तमान उम्र है।

40. पिछले प्रश्न की भाँति यह भी सरल समीकरण द्वारा हल होता है। यदि पुत्र की उम्र अभी x वर्ष है, तो पिता की उम्र $2x$ हुई। 18 वर्ष पहले दोनों की ही उम्र 18 वर्ष कम थी: पिता की उम्र थी $2x - 18$ और पुत्र की $x - 18$ । ज्ञात है कि उस समय पिता की उम्र पुत्र की उम्र से तीन गुनी अधिक थी:

$$3(x - 18) = 2x - 18$$

यह समीकरण हल करने पर $x = 36$: पुत्र की उम्र अभी 36 वर्ष है और पिता की 72 वर्ष।

41. माना कि पहले ग्लास में x ग्राम नमकाम्ल था और दूसरे में x ग्राम पानी। पहली बार डालने पर पहले ग्लास में $(x-20)$ ग्राम घम्ल बचता है और दूसरे में $(x+20)$ ग्राम घम्ल और पानी का

धोल। दूसरी बार डालने पर दूसरे ग्लास में $\frac{1}{3}(x+20)$ ग्राम द्रव बचता है और पहले में

$$x-20+\frac{2}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3} \text{ ग्राम।}$$

जात है कि अब दूसरे ग्लास में पहले ग्लास की अपेक्षा चौगुना कम द्रव है, अतः

$$\frac{4}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3},$$

जिससे $x=100$ । प्रत्येक ग्लास में 100 ग्राम द्रव था।

42. रुबल के नोटों को x तथा 20 कोपेक के सिक्कों को y से चिह्नित करें (x और y क्रमशः नोटों तथा सिक्कों की प्रारंभिक संख्याएँ हैं)। दूकान जाते वक्त बटुए में

$$100x+20y \text{ कोपेक थे।}$$

लौटने पर

$$(100y+20x) \text{ कोपेक बचे।}$$

दूसरी राशि पहली से तिगुनी कम है, अतः

$$3(100y+20x)=100x+20y$$

व्यंजन को सरल करने पर:

$$x=7y$$

यदि $y=1$, तो $x=7$ । इस मान्यता के अनुसार प्रारंभ में मेरे पास 7 रुबल 20 कोपेक थे, जो प्रश्न की शर्त ("लगभग 15 रुबल") से काफी भिन्न है।

अब देखें $y=2$; तब $x=14$ । अतः प्रारंभिक राशि 14 रुबल 40 कोपेक होती है और यह स्थिति शर्त को पूरी करती है।

$y=3$ मानें, तो रकम (21 रुबल 60 कोपेक) काफी बड़ी हो जाती है।

अतः एकमात्र उपयुक्त उत्तर है—14 रुबल 20 कोपेक। खरीद के बाद दो नोट तथा 14 सिक्के, अर्थात् $200+280=480$ कोपेक बचते हैं, यह सचमुच में प्रारंभिक राशि का तिहाई है ($1440:3=480$)।

बचे की गयी राशि: $1440-480=960$ कोपेक। मतलब कि 9 रुबल 60 कोपेक का सामान खरीदा गया।

अध्याय 4

आपको गिनना आता है?

43. आपको गिनना आता है? इस प्रश्न से तीन साल से अधिक उम्र का कोई भी व्यक्ति अपमानित महसूस करेगा। प्रथम से "एक", "दो", "तीन" का उच्चारण करने के लिये विशेष कला की आवश्यकता नहीं पड़ती। फिर भी मुझे विश्वास है कि इस घासान लगने वाले काम को हमेशा अच्छी तरह से नहीं करते। क्या गिनना है, इसपर सब निर्भर करता है। बिस्बे में पड़े काँटियों को गिनना कठिन नहीं है। लेकिन उसमें यदि काँटी के साथ पेंच भी मिले हों और उनकी संख्यायें अलग-अलग निर्धारित करनी हों, तब घाप क्या करेंगे? पहले काँटी और पेंच के अलग-अलग ढेर बनायेंगे और फिर गिनने?

ऐसी समस्या गृहस्थान के सामने आती होती है, जब उसे धुलाई के लिये कपड़ों को गिनती करनी पड़ती है। वह पहले अलग-अलग प्रकार के कपड़े अलग ढेरों में रखती है: कमीजें एक ढेर में, तोलिये दूसरे ढेर में, तकिये के खोल तीसरे ढेर में, आदि। और सिर्फ इस तैयारी को पूरा करने के बाद वह गिनना शुरू करती है कि किस ढेर में कितने कपड़े हैं।

बस इसी को कहते हैं कि गिनना नहीं आता! क्योंकि असमान वस्तुओं को गिनती को यह विधि असुविधाजनक है, परियम भी है और कई हालातों में विलगुल असंभव है। अच्छा है, यदि आपको काँटी या कपड़े गिनने पड़ते हैं: उन्हें अलग ढेरों में जमा कर सकते हैं। लेकिन किसी बनपाल की दृष्टि से सोचिये। उसे गिनना है कि एक हेक्टर में कितने बीड़ हैं, कितने देवदार और कितने फर वृक्ष। वृक्षां

के घाप घनग-घनग डेर नहीं बना सकते। क्या करेंगे? पहले सारे चीज के पेड़ गिन लेंगे, फिर देखादाक और फिर बर्च? एक हेक्टर के घापकी कई चमकर लगाने पड़ेंगे!

क्या कोई आसान विधि नहीं है कि एक ही चमकर लगाना पड़े? हाँ, ऐसी एक विधि है और इसका उपयोग बनपाल पुराने जमाने से करते आ रहे हैं। काँटी और पेंचों की गिनती के उदाहरण द्वारा इस विधि को समझाया है।

काँटियाँ और पेंचों को घनग डेरों में रखे बगैर, एक बार में ही उनकी संख्यायें जानने के लिये एक कागज और पेंटिल रख लीजिये। कागज पर निम्न नमूने की सारणी बना लीजिये :

काँटी	पेंच

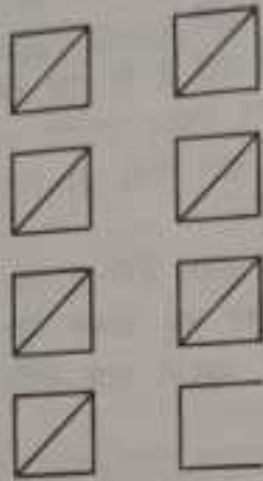
इसके बाद गिनना शुरू कीजिये। दिब्बे से कोई चीज निकालिये; काँटी या पेंच, जो हाथ आ जाये। यदि यह पेंच है, तो सारणी में पेंच के नीचे एक लकीर का चिह्न लगा दें और यदि यह काँटी है, तो काँटी के नीचे। अब दूसरी चीज निकालिये और उसके साथ भी यही कीजिये। यह क्रिया तबतक दुहराते जायें, जबतक कि दिब्बा खाली न हो जाये। यह काम खत्म हो जाने पर घापकी सारणी में काँटी के स्तंभ में उतनी लकीरें होंगी, जितनी दिब्बे में काँटियाँ हैं और पेंच के स्तंभ में उतनी लकीरें होंगी, जितने पेंच हैं। अब इन लकीरों को गिन कर योग लिख लेना रहता है।

लकीरों की गिनती को सरल बनाने तथा जल्द करने के लिये उन्हें एक के नीचे एक नहीं बनाते बल्कि चित्र 30 में दर्शायी धाकृति में पाँच-पाँच के समूहों में बनाते हैं।

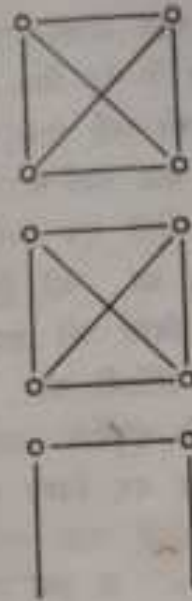
इस तरह के वर्ग जोड़ों में बनाते हैं अर्थात् दस लकीरों के बाद आरम्भ की लकीर नीचे की दूसरी पंक्ति में आसते हैं। जब दूसरी पंक्ति



चित्र 30. पाँच-पाँच के समूहों में लकीरें बनाने चाहिये।



चित्र 31. गणना-फल इस प्रकार लिखे जाते हैं।



चित्र 32. प्रत्येक पूर्ण वर्ग में संख्या 10 चोतित करता है।

में भी दो वर्ग (दस लकीरें) हो जायें, तो तीसरी पंक्ति से शुरू करते हैं। लकीरें चित्र 31 की तरह लगेंगी।

इस प्रकार से लगायी गयी लकीरों को गिनना काफी आसान है। अक्सर, उदाहरण के लिये, पूर्ण वर्ग (चित्र 32) जैसी आकृतियों का प्रयोग किया जाता है, जिनमें से प्रत्येक 10 चोतित करती है। जंगल के किसी भाग में भिन्न वृक्षों की संख्या जानने के लिये सारणी में दो की जगह चार (यदि चार प्रकार के वृक्ष हों) स्तंभ बनाने पड़ेंगे और खड़े स्तंभों की अपेक्षा पड़े स्तंभ, शैतिज कतारें अधिक सुविधाजनक होंगी। गिनती के पहले सारणी का रूप चित्र 33 की भाँति होगा।

गिनती के बाद की सारणी चित्र 34 जैसी होगी।

संख्याओं का अंतिम योग प्राप्त करना यहाँ काफी आसान है:

चीड़	53	बर्ब	46
फर	79	देवदारु	37

बीड़	
जर	
बर्ष	
दिखाए	

चित्र 33. जंगल में पेड़ गिनने के लिये सारणी।

बीड़	४	४	४	४	४	४	४	४	४
जर	४	४	४	४	४	४	४	४	४
बर्ष	४	४	४	४	४	४	४	४	४
दिखाए	४	४	४	४	४	४	४	४	४

चित्र 34. गणना के बाद सारणी का रूप।

कुलबीड़ा	
अवकाश	
अवकाश	
अवकाश	
अवकाश	

चित्र 35. मैदानी पौधों की गिनती इससे शुरू करनी चाहिये।

धुलाई के कपड़ों की सूची गृहस्थित इसी प्रकार से बना सकती है। इससे थम व समय की बचत होगी।

यदि आपको किसी हरे मैदान में विभिन्न पौधों की संख्याएँ जात करने की आवश्यकता पड़े, तो धर आप जानते हैं कि न्यूनतम बचधि में यह कैसे किया जाये। मैदान में पाये जाने वाले पौधों में से प्रत्येक के नाम कागज पर एक-एक स्तंभ बना लेते हैं। कुछ स्तंभ खाली छोड़

दिये जाते हैं—यह उन पौधों के लिये होंगे, जो मैदान में गिन सकते हैं, पर अभी भाग्यो पता नहीं है। गिनती का काम पाप चित्र-35 में दिखायी गयी सारणी के साथ शुरू करेंगे।

पाने का काम उसी प्रकार है, जैसे जंगल में वृक्षों को गिनने के लिये। 44 जंगल में पेड़ गिनने की क्या जकूरत है? शहरी लोगों को तो यह बिल्कुल असंभव प्रतीत होता है। से० वि० तोल्स्तोप के "थान्ना करेनिना" उपन्यास में कुमि-जाता जेकिन जंगल बेचने की इच्छा रखते थाने, पर इन बातों से अनभिज्ञ, अपने एक रिज्तेदार से पूछता है:

—“तुमने पेड़ गिने?”

—“पेड़ कैसे गिने?”—यह धारण्य प्रकट करता है।—“यद्यपि थानू के कान घोर प्रहों से घाती फिरणों को विद्वान बुद्धी के लोग गिन सकते हैं...”

—“हाँ, रिखोनित (बनिये) की विद्वान बुद्धी गिन ले सकती है। घोर बिना गिने कोई भी नहीं खरीदेगा।”

जंगल में पेड़ यह निर्धारित करने के लिये गिने जाते हैं कि उसमें कितने घनमीटर लकड़ी प्राप्त हो सकती है। पेड़ पूरे जंगल में नहीं गिनते, बल्कि उसके एक निश्चित भाग में गिनते हैं। चौथाई या आधा हेक्टर का एक क्षेत्र चुना जाता है, जिसमें पेड़ों का घनापन, उनके प्रकार, मुटाई और ऊँचाई उस जंगल के लिये मौसत हों। निस्संदेह, ऐसे क्षेत्र के चुनाव के लिये अनुभवी निगाह चाहिये। गिनते वक्त सिर्फ पेड़ों के प्रकार को ही ध्यान में नहीं रखते; यह भी देखते हैं कि विभिन्न मुटाइयों (25 से० मी०, 30 से० मी०, 35 से० मी०) के कितने तने हैं। वन-विभाग द्वारा गिनती के लिये बनायी गयी सारणी में हमारी सरल सारणी की तरह सिर्फ चार स्तंभ नहीं होते, बल्कि बहुत सारे होते हैं। आप कल्पना कर सकते हैं कि यदि यहाँ बतायी गयी विधि की बजाय साधारण विधि से गिनना होता, तो कितनी बार पूरे जंगल का चक्कर लगाना पड़ता।

वैसा कि देखते हैं, गिनती सहज और सरल तभी होती है, जब समान वस्तुओं को गिनते हैं। यदि असमान वस्तुओं की संख्यायें ज्ञात करनी होती हैं, तो यहाँ समझायी गयी विशेष विधि का प्रयोग करते हैं, जिसके अस्तित्व को बहुत से लोग ज्ञायद कल्पना भी नहीं करते।

अध्याय 5

अंकों की पहेलियाँ

45. पाँच रुबल में सौ रुबल. मंच से अंकों के एक जादूगर ने दर्शकों के समक्ष एक लुभावना प्रस्ताव रखा :

-गवाहों के समक्ष घोषणा करता हूँ, जो मुझे 50, 20 और 5 कोपेक के कुल 20 सिक्कों में पाँच रुबल देगा, उसे मैं सौ रुबल दूंगा। पाँच रुबल में सौ! किसे चाहिये?

चुप्पी छा गयी।

दर्शक सोच में डूब गये। डायरियों के पृष्ठों पर पेंसिलें फिमलने लगीं, पर कोई भी उठा नहीं।

-मैं देखता हूँ कि दर्शकों को पाँच रुबल में सौ का सौदा महंगा लग रहा है। मैं दो रुबल की छूट देने को तैयार हूँ और नया दाम रखता हूँ: बताये गये मूल्यों के 20 सिक्कों में 3 रुबल। 3 रुबल में 100! चाहने वाले साइन में अग जायें।

लेकिन साइन नहीं लग रही थी। दर्शक इस चिरल प्रयत्न का नाम उठाने से चूक रहे थे।

-क्या तीन रुबल भी महंगा है? खैर, एक रुबल और कम कर देता हूँ; बताये गये 20 सिक्कों में दो रुबल साइये और मैं उसी क्षण सौ रुबल दूंगा।

चूँकि कोई भी इस विनिमय के लिये सामने नहीं आ रहा था, जादूगर ने कहना जारी रखा:

-दो सकता है कि आपके पास अभी छोटे सिक्के नहीं हैं। आप

समान नहीं, मैं कर्ज दे सकता हूँ। आप सिर्फ कागज पर लिख दें कि किस मूल्य के नितने सिक्के मुझे देंगे।

46. ह्वार. क्या आप संख्या 1000 को सात समान धंकों में व्यक्त कर सकते हैं?

आपको इन धंकों के सिवा विभिन्न गणितीय क्रियाओं के चिह्नों को भी प्रयुक्त करने की छूट है।

47. चौबीस. संख्या 24 को तीन सट्टों की मदद से व्यक्त करना बहुत आसान है: $8+8+8$ । क्या आप इस संख्या को किसी अन्य तीन समान धंकों से व्यक्त कर सकते हैं? इस प्रश्न के कई हल हैं।

48. तीस. संख्या तीस को तीन पंजों द्वारा आसानी से व्यक्त किया जा सकता है: $5 \times 5 + 5$ । किसी अन्य समान तीन धंकों द्वारा यह करना कहीं बटिल है।

कीर्तित करें, शायद आपको कुछ हल मिल जायें।

49. लुप्त धंक. गुणन के इस उदाहरण में धाघे से अधिक धंकों की जगह पर तारक-चिह्न हैं।

$$\begin{array}{r} *1* \\ \times 3*2 \\ \hline *3* \\ + 3*2* \\ + *2*5 \\ \hline 1*8*30 \end{array}$$

क्या आप लुप्त धंकों को बता सकते हैं?

50. कौनसी संख्याएँ. ऐसा ही एक और प्रश्न है।

दिये हुए उदाहरण में कौन सी संख्याएँ आपस में गुणित हैं:

$$\begin{array}{r} * * 5 \\ \times 1 * * \\ \hline 2 * * 5 \\ + 13 * 0 \\ \hline 4 * 77 * \end{array}$$

51. क्या भाज्य है? भाग के निम्न उदाहरण में लुप्त धंकों को बतायें:

$$\begin{array}{r}
 *2*5* \overline{) 325} \\
 \underline{***} \\
 *0** \\
 \underline{*9**} \\
 5 \\
 \underline{ *5*} \\

 \end{array}$$

52. 11 से भाग. नीचे धंकों की कोई ऐसी संख्या लिखें, जिसके सभी धंक भिन्न हों और जिसमें 11 से भाग देने पर शेष न बचे।

ऐसी अधिकतम तथा न्यूनतम संख्याओं को भी लिखें।

53. प्रजीब गुणन. दो संख्याओं के निम्न गुणन को देखें:

$$48 \times 159 = 7632$$

गुणन की विशेषता यह है कि इसमें एक ही साथ सभी सार्थक धंक सम्मिलित हैं।

क्या आप कुछ और ऐसे ही उदाहरण दे सकते हैं? यदि और भी ऐसे उदाहरण संभव हैं, तो वे कितने हैं?

54. संख्याओं का त्रिकोण. चित्र 36 में दिये त्रिकोण के गोलों में सभी नौ सार्थक धंकों को इस प्रकार लिखें कि हर भुजा में उनका योग 20 हो।

55. संख्याओं का एक और त्रिकोण. उन्नी सिमुब (चित्र 36) के गोलों में सभी सार्थक धंकों को इस प्रकार भरना है कि प्रत्येक भुजा पर उनका योग 17 हो।

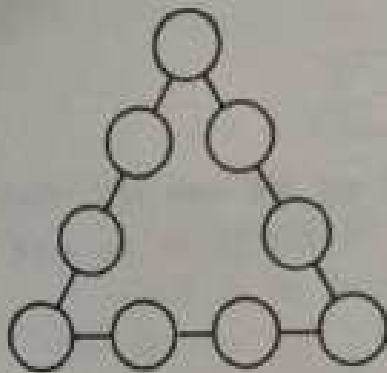
56. जादुई सितारा. चित्र 37 में दिये छे शीर्षों वाले सितारे में "जादुई" गुण है: सभी छे कतारों में संख्याओं का योग समान है:

$$\begin{array}{ll}
 4 + 6 + 7 + 9 = 26 & 11 + 6 + 8 + 1 = 26 \\
 4 + 8 + 12 + 2 = 26 & 11 + 7 + 5 + 3 = 26 \\
 9 + 5 + 10 + 2 = 26 & 1 + 12 + 10 + 3 = 26
 \end{array}$$

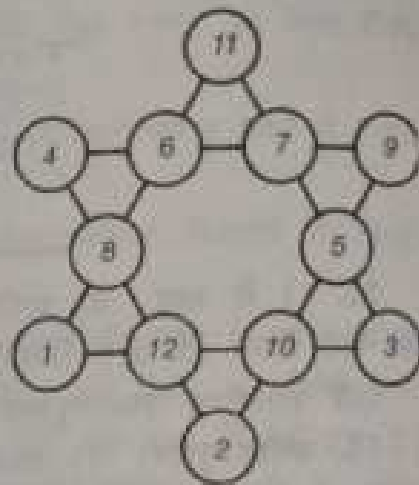
लेकिन शीर्षों पर स्थित संख्याओं का योग दूसरा है:

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30$$

क्या आप गोलों में लिखी संख्याओं के स्थान में हेर-फेर कर इस संख्या-तारक को इस प्रकार सही सुधार सकते कि सभी सीधी कतारों



चित्र 36. वृत्तों में संकों को रखें।



चित्र 37. संकों से बना षटकोण चितारा।

ये दो संख्याओं का योग समान (26) न हो, बल्कि शीर्षों पर स्थित संख्याओं का योग भी उतना ही (26) हो?

45-56 पहेलियों के हल

45. तीनों ही प्रश्न हलातीत हैं; उनका हल असंभव है। जादूगर बिना किसी डर के कोई भी इनाम घोषित कर सकता था। यह सिद्ध करने के लिये हम बीजगणित के प्रकाश में ये प्रश्न एक-एक कर देखते हैं।

5 रुबल का भुगतान: माना कि यह घटावगी संभव है और इसके लिये 50 कोपेक के x सिक्के, 20 कोपेक के y सिक्के और 5 कोपेक के z सिक्के चाहिये। समीकरण होगा:

$$50x + 20y + 5z = 500$$

5 से काट कर मिलता है:

$$10x + 4y + z = 100$$

इसके प्रतिरिक्त, शर्त के मुताबिक सिक्कों की कुल संख्या 20 होनी चाहिये; अतः x , y तथा z एक और समीकरण से संबंधित है:

$$x + y + z = 20$$

इस समीकरण को प्रथम समीकरण से घटाकर प्राप्त करते हैं:

$$9x + 3y = 80$$

द्व 3 से भाग देकर समीकरण को निम्न रूप देते हैं:

$$3x + y = 26\frac{2}{3}$$

द्व 50 के सिक्कों की आवश्यक संख्या की तिगुनी होने के कारण $3x$ एक पूर्ण संख्या है। 20 कोपेक के सिक्कों की संख्या y भी एक पूर्ण संख्या है। दो पूर्ण संख्याओं का योग निम्न $(26\frac{2}{3})$ में नहीं आ सकता। हमारी मान्यता कि प्रश्न का हल संभव है, गलत निष्कर्ष दे रही है। अतः प्रश्न हलातीत है।

पाठक के समक्ष अभी दूसरे दो "संश्लेषण" की समस्याओं को भी हलातीत सिद्ध कर सकते हैं, जिनमें 3 तथा 2 रुबल देने थे। इनमें से पहले प्रश्न से निम्न समीकरण बनता है:

$$3x + y = 13\frac{1}{3}$$

और दूसरे से

$$3x + y = 6\frac{2}{3}$$

दोनों ही समीकरण पूर्णांकों में हलातीत हैं।

जैसा कि देखते हैं, जादूगर हल के लिये बड़े इनामों की घोषणा करके कोई खतरा नहीं मोल ले रहा था। उसे इनाम कभी देना नहीं पड़ता।

दूसरी बात होती, यदि वह उक्त मूल्यों के 20 सिक्कों में 2, 3 या 5 रुबल नहीं, बल्कि, उदाहरण के लिये, 4 रुबल देने को कहता। तब प्रश्न के कई समाधान संभव थे।*

$$46. 888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$$

दूसरे हल भी हैं।

* एक संभव हल इस प्रकार है: 50 कोपेक के 6 सिक्के, 20 कोपेक के 2 सिक्के और 5 कोपेक के 12 सिक्के।

47. दो हल इस प्रकार हैं:

$$22 + 2 = 24; 3^2 - 3 = 24$$

48. तीन हल दिये जा रहे हैं:

$$6 \times 6 - 6 = 30; 3^2 + 3 = 30; 33 - 3 = 30$$

49. लुप्त घंके एक-एक कर दृढ़ते हैं। निम्न विचार-क्रम का अनुसरण करें।

सुविधा के लिये पंक्तियों का क्रमांकन करते हैं:

$$\begin{array}{r} *1^* \dots\dots\dots \text{I} \\ \times 3^*2 \dots\dots\dots \text{II} \\ \hline *3^* \dots\dots\dots \text{III} \\ 3^*2^* \dots\dots\dots \text{IV} \\ + *2^*5 \dots\dots\dots \text{V} \\ \hline 1^*8^*30 \dots\dots\dots \text{VI} \end{array}$$

समझना आसान है कि III पंक्ति में अंतिम तारा 0 है, क्योंकि VI पंक्ति के अंत में 0 है।

घंक I पंक्ति के अंतिम तारे का मान दृढ़ें: यह एक ऐसा घंक है, जिसमें 2 से गुणा करने पर 0 से अंत होने वाली संख्या मिलती है, तथा 3 से गुणा करने पर 5 से अंत होने वाली संख्या मिलती है (पंक्ति V)। ऐसा घंक सिर्फ 5 हो सकता है।

घाने, स्पष्ट है कि IV पंक्ति के अंत में 0 है। (III तथा VI पंक्तियों में दाएँ से द्वितीय घंकों की तुलना करें!)

II पंक्ति में तारे के पीछे कौन सा घंक छिपा है, यह भाँपना भी कठिन नहीं है: यह 8 है, क्योंकि सिर्फ 8 को 15 से गुणा करने पर 20 से अंत होने वाली संख्या मिलती है (IV पंक्ति)।

घोर अंत में स्पष्ट होता है कि I पंक्ति में प्रथम तारे की जगह कौन सा घंक है: यह 4 है, क्योंकि सिर्फ 4 में 8 से गुणा करने पर 3 से शुरु होने वाली संख्या मिलती है (पंक्ति IV)।

बाकी लुप्त घंकों का पता लगाना अब कठिन नहीं है: प्रथम दो पंक्तियों की संख्याओं को, जो अब निश्चित हो चुकी हैं, आपस में गुणा कर देने पर अन्य सभी लुप्त घंके ज्ञात हो जाते हैं।

अंत में हमें गुणन का निम्न उदाहरण प्राप्त होता है:

$$\begin{array}{r}
 \times 415 \\
 \times 382 \\
 \hline
 830 \\
 + 3320 \\
 + 1245 \\
 \hline
 158530
 \end{array}$$

50. विछले प्रश्न की भाँति ही इस प्रश्न के लुप्त अंकों का पता लगाते हैं। उत्तर यह है:

$$\begin{array}{r}
 + 325 \\
 + 147 \\
 \hline
 2275 \\
 + 1300 \\
 + 320 \\
 \hline
 47775
 \end{array}$$

51. भाग का उदाहरण इस प्रकार है

$$\begin{array}{r}
 52650 \overline{)325} \\
 \underline{325} \quad 162 \\
 2015 \\
 \underline{1950} \\
 650 \\
 \underline{650} \\
 \hline
 \end{array}$$

52. इस प्रश्न को हल करने के लिये 11 के भाज्यता-सूचक को जानना चाहिये। किसी संख्या के सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग का अंतर यदि शून्य हो या 11 से भाज्य हो, तो संख्या 11 से भाज्य होती है। उदाहरण के लिये संख्या 23658904 का परीक्षण करे।

सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग:

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21$$

विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग:

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16$$

उनका अंतर (बड़ी में से छोटी संख्या घटाते हैं)

$$21 - 16 = 5$$

यह अंतर (5) 11 से विभाजित नहीं होता, अतः दी गयी संख्या बिना शेष के 11 से विभाजित नहीं होती।
दूसरी संख्या का परीक्षण करें: 7344535;

$$3+4+3=10 \quad 7+4+5+5=21 \quad 21-10=11$$

चूंकि 11 से 11 विभाज्य है, तो दी गयी संख्या भी 11 से विभाज्य है।

यब घासानी से समझा जा सकता है कि नौ अंकों को किस प्रकार लिखना चाहिये कि प्रश्न की शर्तों को पूरा करते हुए 11 की अपवर्त्य (गुणज) संख्या प्राप्त हो जाये।

उदाहरण के लिये: 352049786

परीक्षण करें: $3+2+4+7+6=22$, $5+0+9+8=22$

अंतर $22-22=0$; अर्थात् उपरोक्त संख्या 11 का अपवर्त्य है।

ऐसी अधिकतम संख्या 987652413 है। न्यूनतम संख्या होगी: 102347586।

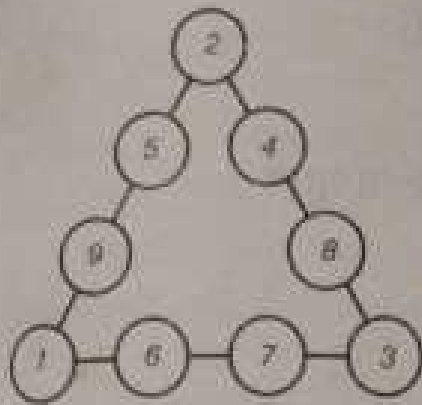
53. धैर्यवान पाठक इस प्रकार के गुणन के नौ उदाहरण दूढ़ सकता है। ये रहे वे:

$$\begin{array}{ll} 12 \times 483 = 5796, & 48 \times 159 = 7632, \\ 42 \times 138 = 5796, & 28 \times 157 = 4396, \\ 18 \times 297 = 5346, & 4 \times 1738 = 6952, \\ 27 \times 198 = 5346, & 4 \times 1963 = 7852, \\ 39 \times 186 = 7254, & \end{array}$$

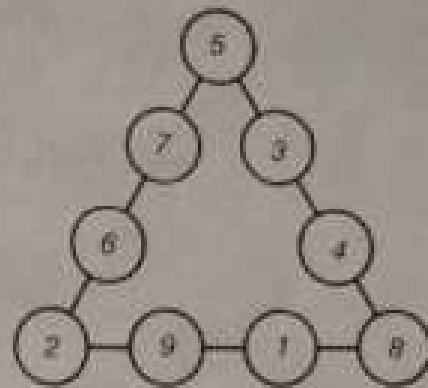
54—55. हल चिह्नों 38 व 39 में दिखाये गये हैं। कतारों की भीतरी संख्याओं के आपसी स्थान बदल कर और भी नये हल दिये जा सकते हैं।

56. संख्याओं की आवश्यक स्थिति को बूढ़ने का काम सरल बनाने के लिये हम निम्न बातों की सहायता लेंगे।

तारे के शीर्षों पर स्थित संख्याओं का योग 26 होना चाहिये और सभी संख्याओं का कुल योग 78 है। अतः भीतरी घटकोग पर की संख्याओं का योग $78-26=52$ होना चाहिये।



चित्र 38

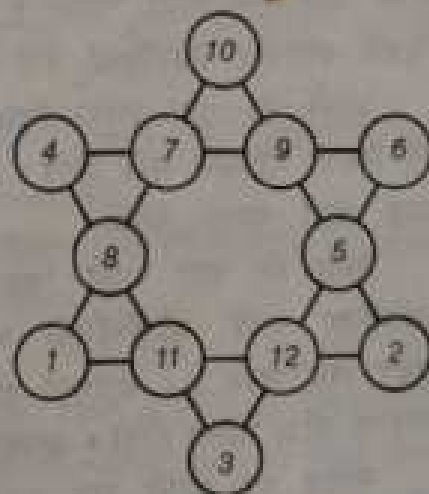


चित्र 39

यह बड़े त्रिकोणों में से एक को देखें। उसकी हर भुजा की संख्याओं का योग 26 है। तीनों भुजाओं की सभी संख्याओं का कुल योग $26 \times 3 = 78$ है, जिसमें शीर्षों पर स्थित संख्याएँ दो बार सम्मिलित हैं। और चूंकि तीनों भीतरी पृष्ठों की संख्याओं का योग (अर्थात् भीतरी पटकोण की संख्याओं का योग) 52 के बराबर होगा, तो हर त्रिकोण के शीर्षों की संख्याओं के योग को दुगुना करने पर $78 - 52 = 26$ मिलना चाहिये, अतः स्वयं यह योग 13 होगा।

यह चोज का क्षेत्र काफी संकुचित हो जाता है। हमें ज्ञात है कि तारे के शीर्षों पर 12 और 11 संख्याएँ नहीं रखी जा सकती (क्यों?)। अतः परीक्षण सिर्फ 10 से शुरू करना चाहिये। इस हावत में हमें तुरत ज्ञात हो जाता है कि त्रिकोण के अन्य दो शीर्षों पर कौन सी संख्याएँ होंगी:। और 2।

इसी प्रकार धीरे-धीरे भागे बढ़ते हुए स्थिति बुझ ली जा सकती है। चित्र 40 में हम यह स्थिति दिखा रहे हैं।



चित्र 40

अध्याय 6

गुप्त-लिपि में पत्र-व्यवहार

57. जाली. भूमिगत क्रांतिकारीयों को अपने कामजात और व इस प्रकार लिखने पढ़ते हैं कि कोई दूसरा उसे पढ़ कर कुछ समझ न पाये। इसके लिये लेखन की विशेष विधियाँ हैं, जिसे गुप्त-लेखन (या "क्रिप्टोग्राफी") कहते हैं। गुप्त-लेखन की भिन्न प्रणालियाँ बनायी गयी हैं। इनका सहारा सिर्फ भूमिगत क्रांतिकारी ही नहीं लेते। कूटनीतिज्ञ और सैनिक अधिकारी भी राज्य की गोपनीय बातों को गुप्त रखने के लिये इनका उपयोग करते हैं। यहाँ हम गुप्त लेखन की एक विधि बताने जा रहे हैं, जिसे "जाली" की विधि कहते हैं। यह अपेक्षाकृत सरल विधि है और संकल्पित से निकट का संबंध रखती है।

इस विधि में पत्र-व्यवहार करने की इच्छा रखने वालों में से हरेक अपने पास एक जाली रखता है। जाली कागज का बना वर्ग होता है, जिसमें वर्गाकार छिड़कियाँ बनी होती हैं।

जाली का एक नमूना चित्र 41 में दिया गया है। छिड़कियों की स्थिति ऐच्छिक नहीं होती। वे एक निश्चित क्रम में होती हैं, जिसे घाप घाने समझ पायेंगे।

माना कि घाप अपने मित्र को यह लिख कर भेजना चाहते हैं: सार्वजनिक पार्टी प्रतिनिधियों की बैठक स्थगित करें। पुलिस को खबर लग चुकी है। साधियों को भी सूचित करें। बैठक की नयी तारीख शीघ्र प्रेषित होगी। आंतोन।

कागज पर जाली रख कर पड़मंतकारी जाली की छिड़कियों में एक-एक कर घक्षर लिखना शुरू करता है।

चूंकि खिड़कियों की संख्या 16 है, तो पहली बार चापकी खबर का सिर्फ एक घंटा लिखा जायेगा :

प्रांचलिक पार्टी प्रतिनिधियों की बैठक स्थ...

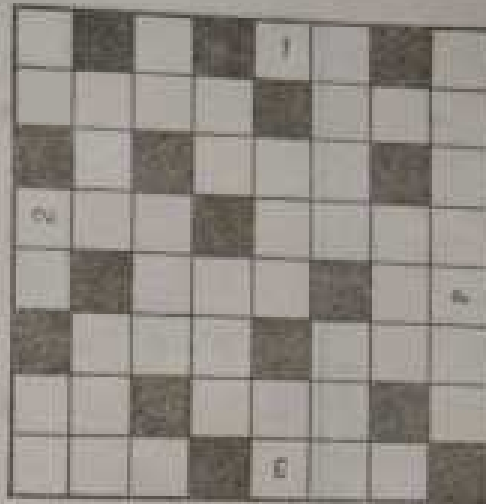
जाली हटाने के बाद कागज पर चित्र 42 की भांति लेख मिलेगा ।

अबतक इसमें कुछ भी गुप्त नहीं है : कोई भी समझ सकता है कि क्या बात है । पर यह सिर्फ शुरुआत है ; पत्र इसी रूप में नहीं रहेगा । पड़संस्कारों अब जाली को कागज पर चढ़ी की मूर्द की दिशा में एक चौपाई धुमा कर रखता है । जाली का स्थान नहीं रहता है, पर 2 से चिह्नित भुजा, जो पहले बायें थी, अब ऊपर आ जाती है । जाली की नयी स्थिति के फलस्वरूप अबतक लिखे अक्षर छिप जाते हैं और खिड़कियों के नीचे कोरा कागज होता है । उनमें अब घाने के 16 अक्षर लिखे जाते हैं । इसके बाद यदि जाली हटायी जाये, तो चित्र 43 की भांति लेख मिलता है ।

इस लेख को दूसरा क्या, खुद लिखने वाला नहीं समझ सकेगा, यदि वह मूल जाने कि उसने क्या लिखा था ।

पर पत्र अभी अमूर है : प्रांचलिक पार्टी प्रतिनिधियों की बैठक स्वमित करें । पुलिस को खबर लग चुकी है ।...

अब घाने लिखने के लिये जाली को फिर चढ़ी की मूर्द की दिशा में चौपाई धुमाते हैं । वह पुनः अबतक लिखे अक्षरों को छिपा लेगी और 16 नये रिक्त स्थान देगी । उनमें अब और शब्दों के लिये जगह मिल जायेगी । उन्हें लिखने के बाद पत्र का रूप चित्र 44 की भांति हो जायेगा ।



चित्र 41. गुप्त पत्र पढ़ने के लिये जानी । (कागज को एक ऐसी जाली बना लें और चित्र 45 में दिये गुप्त पत्र को पढ़ें ।)

	भां	व	ति
		क	
वा	दाँ		घ
		ति	
	नि		धि
वाँ		की	
	वे		उ
	इ		स्य

चित्र 42. जाती हटा देने पर यह आलेख नजर आयेगा।

	भां	नि	व	त	ति
			क	क	र
वा	पु	दाँ		धि	घ
म			ति	की	य
	नि	व		धि	र
वाँ			अ	की	
	प	ई		वु	उ
इ			क		स्य

चित्र 43 इसके बाद आगे अक्षर लिखते हैं।

अंत में जाती को आखिरी बार घुमाते हैं। भुजा 4 ऊपर आ जाती है। 16 नोरे वर्गों में पत्र के बाकी शब्द लिखते हैं। चूंकि तीन जाती घर बच जाते हैं, उन्हें किन्हीं क, म, त अक्षरों से भर देते हैं, ताकि पूर्ण में जाती स्थान न हों।

सा	पां	वि	व	वि	न	वि	
	पाँ		क	क	का		रं
पा	पु	रीं	भी		वि	व	पु
स		वि	वि	को		ह	ख
	वि	व		क	धि	र	
पाँ	रे		न	की	बै		ठ
	व	बै	क		पु	ठ	की
है	को		क	न		पी	र्य

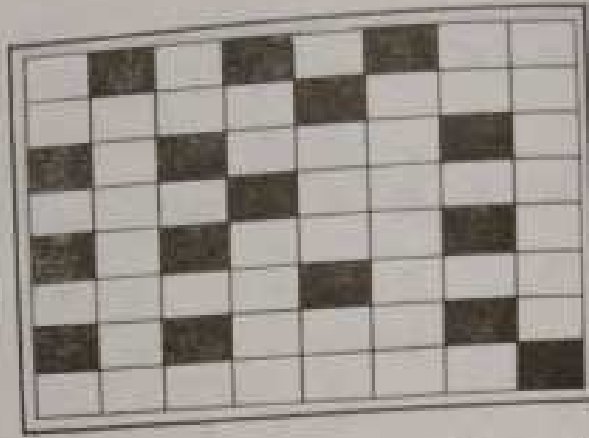
चित्र 44. जाली फिर दूसरी तरह घुमा कर रखनी चाहिये।

सा	पां	वि	व	वि	न	वि	ता
री	पाँ	ख	क	क	की	ली	रं
पा	पु	रीं	भी	इ	वि	व	पु
न	रे	वि	वि	को	धि	न	ख
न	वि	व	ही	क	धि	र	नी
पाँ	रे	पाँ	न	की	बै	तो	ठ
न	व	बै	क	क	पु	ठा	पी
है	की	व	क	न	ट	पी	र्य

चित्र 45. गुप्त पत्र तैयार है।

पत्र का रूप चित्र 45 की भाँति होगा।

पत्र इसमें कुछ पढ़ने की कोशिश करें! पुलिस के हाथों पत्र पढ़ने पर भी कोई डर नहीं है। पुलिसवालों को लाभ तक हो कि इसमें कोई महत्वपूर्ण सूचना छिपी है, पत्र का सार वही समझ सकता है।



चित्र 46. पोस्टकार्ड के प्रकार की जाली।

जिसके लिये वह लिखा गया है। उसके पास बैसी ही जानी होती है, जिसकी मदद से पत्र लिखा गया था।

पत्र पाने वाला इस गुप्त पत्र को कैसे पढ़ेगा? वह जाली को पत्र पर इस प्रकार रखेगा कि जाली की भुजा ऊपर रहे। बिड़कियों से उसे 16 अक्षर नजर आयेंगे, जिन्हें वह अलग कागज पर उतार लेगा। इसके बाद वह जाली को घुमा देगा—और उसके सामने अगले 16 अक्षर होंगे। चौथी बार घुमाने के बाद सारा पत्र पढ़ा जा चुका होगा।

वर्गाकार जाली की जगह पर पोस्टकार्ड जैसी आयताकार जाली का भी प्रयोग किया जा सकता है। इसके पर भी लम्बे होते हैं (चित्र 46), यतः उनमें अक्षरों की बजाय घाप छोटे शब्द भी लिख सकते हैं। यह मत सोचिये कि शब्द लिखने से पत्र पढ़ना सरल हो जायेगा। कुछ शब्द यदि पढ़े भी जाते हों, ध्वजाने की कोई बात नहीं है। शब्दों का कम इतना बिगड़ा हुआ है कि रहस्य खुलने की आशंका नहीं है। आयताकार जाली कागज पर इस प्रकार रखी जाती है कि पहले उसकी एक भुजा ऊपर रहे, फिर उसके सामने की भुजा ऊपर रहे। इसके बाद उसे पलट कर घन्प दी और स्थितियों में उसका प्रयोग करते हैं। हर नयी स्थिति में जाली पहले लिखे गये अक्षरों व शब्दों को एक लेती है। यदि एक ही ऐसी जाली संभव होती, तो उसकी सहायता से लिखे गये पत्र में कुछ भी छिपाया नहीं जा सकता। पुलिस के पास बैसी ही एक जाली होती और रहस्य कुछ क्षणों में खुल जाता। पर भिन्न जालियों की संख्या विराट है।

54 घरों वाले वर्ग से जनी सभी संभव जालियाँ चित्र 47 में दिखायी गयी हैं। घाप बिड़कियों के लिये कोई भी 16 अक्षर चुन सकते हैं। सिर्फ इस बात का अयत्न रखें कि चुने गये घरों में

समान नम्बर वाले दो घर न हों। हमने जिस जानी का व्यवहार ऊपर के उदाहरण में किया है, उसमें निम्न नम्बर के घर लिये गये हैं :

2, 4, 5
14
9, 11, 7
16
8, 15
3, 12
10, 6
13, 1

चाप देखते हैं कि इसमें एक भी संख्या दुहरायी नहीं गयी है।

घरों में संख्याओं का क्रम-विन्यास (चित्र 43) समझना कठिन नहीं है। घरों को चार छोटे-छोटे बराबर घरों में बाँट देते हैं, जिन्हें हम रोमन संख्याओं I, II, III, IV (चित्र 48) द्वारा व्यक्त करेंगे। घर I में घरों का क्रमांकन साधारण क्रम में किया गया है। घर II—घर I ही है, जिसे दायी दिशा में चौथाई घुमाव दिया गया है। एक चौथाई घीर घुमाने पर हमें घर III प्राप्त होता है और उसे चौथी बार घुमाने पर घर IV मिलता है।

प्रबुद्धि कर देखें कि भिन्न जानियों की क्या संख्या हो सकती है।

घर No 1 को 4 जगहों (4 घरों) में चुना जा सकता है। उसके चार स्थानों में से किसी के भी साथ घर No 2 के लिये 4 जगहें चुनी जा सकती हैं। अतः दो खिड़कियाँ 4×4 , अर्थात् 16 तरीकों से चुनी जा सकती हैं। तीन खिड़कियाँ— $4 \times 4 \times 4 = 64$ तरीकों से चुनी जा सकती हैं। इस विचार-क्रम का अनुसरण करते हुए

1	2	3	4	13	9	5	7
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	8	5
1	5	9	13	4	3	2	1

चित्र 47. इस घर में मिलियाई से अधिक गुप्त जानियाँ हैं।

I	II
III	IV

चित्र 48. चित्र 47 का चारैख।

हम निर्धारित कर सकते हैं कि 16 खिड़कियाँ 4^{16} (16 बार 4 का गुणन) तरीकों से चुनी जा सकती हैं। इस प्रकार 1 घरख से अधिक प्रकार की जालियाँ प्राप्त होती हैं। यदि यह संख्या कुछ प्रतिशत लगे (बिल्कुल पात-पात खिड़कियाँ चुनना ठीक नहीं रहेगा, अतः ऐसी जालियों को हम छोड़ दें) तो भी भिन्न जालियों की संख्या कुछ करोड़ों से कम नहीं होगी। पत्र पड़ने के लिये आवश्यक जाली बुँडना भूसे के ढेर में सूई खोजना होगा।

यदि मान लें कि अर्धोद्घाटकों का एक दल एक जाली बनाने तथा देखने में कि पत्र का कोई अर्थ निकलता है या नहीं, सिर्फ एक मिनट व्यय करता है तो अर्धोद्घाटन में इसियों करोड़ मिनट लग जायेंगे, पूरी सहस्राब्दियाँ बीत जायेंगी। पर यह उसी स्थिति के लिये सही है, जब अर्धोद्घाटन का काम हाथ से ही रहा हो। इसी लेखक की "मनोरंजक बीजगणित" पुस्तक में आप घुतकर्मों परिकल्पन मशीनों के बारे में पढ़ सकते हैं। ऐसी मशीनें विशेष प्रोद्योग पर एक सेकेंड में हजारों करोड़ों कल्पन कर सकती हैं। वे सिर्फ गिनना ही नहीं जानतीं। वे, उदाहरण के लिये, जालियाँ बना-बना कर उनका परीक्षण भी कर सकती हैं कि उनसे अर्धोद्घाटन होता है या नहीं। इसके लिये आपको सिर्फ तदनु रूप प्रोद्योग बनाना पड़ेगा। ऐसे घुतकर्मियों को एक जाली के परीक्षण में यदि एक सेकेंड का हजारवाँ अंश व्यय करना पड़ता है, तो कुछ करोड़ जालियों के परीक्षण में उन्हें कुछ लाख सेकेंड, अर्थात् कुछ दिन खर्च करने पड़ेंगे। जैसा कि देखते हैं, आधुनिक परिस्थितियों में गुप्त पत्र-व्यवहार की गोपनीयता बनाये रखना कठिन होता जा रहा है।

58. जाली को याद कैसे रखें? मान लें कि गणितज्ञों द्वारा अर्धोद्घाटन का खतरा नहीं है। पत्र का सिर्फ 2-3 दिन गोपनीय रहना काफी है और इतने कम समय में पत्र पकड़ा और अर्धोद्घाटन के लिये गणित-केंद्र में भेजा नहीं जा सकता। धड़यंत्रकारी जाली का प्रयोग करना निश्चय करते हैं। जाहिर है कि पत्र-व्यवहारक खुद सावधानी बरतेंगे कि पत्र किसी दूसरे के हाथ न लग जाये। बेहतर होगा, यदि जाली अपने पास रखा ही न जाये। वे पत्र मिलाने पर उसे बना ले सकते हैं और पढ़ कर उसे नष्ट कर दे सकते हैं। इसके लिये उन्हें जाली

82 = 01010010 -	
8 = 00001000 -	
162 = 10100010 -	
76 = 00010000 -	
68 = 01000100 -	
136 = 10001000 -	
34 = 00100010 -	
17 = 00010001 -	

चित्र 49. गुप्त जाली का अंकगणित।

को याद रखना होगा। लेकिन खिड़कियों का कम याद कैसे रखा जा सकता है? यहाँ भी गणित की सहायता ली जा सकती है। खिड़कियों को संख्या 1 से चोटित करने और अन्य घरों को 0 से। सब जाली के घरों की प्रथम कतार को निम्न विधि से व्यस्त कर सकते हैं (चित्र 49) :

01010010

या, प्रथम शून्य छोड़ देने पर, -

1010010

दूसरी कतार, यदि आरंभिक शून्यों को छोड़ दिया जाये, इस प्रकार व्यक्त होगी :

1000

बाकी कतारों का घोटन निम्न प्रकार से होगा :

10100010	10001000
10000	100010
1000100	10001.

इन संख्याओं का लेखन सरल करने के लिये हम इन्हें दशमलव प्रणाली में, जिसे साधारणतया प्रयोग करते हैं, नहीं मान कर विगुन

प्रणाली में मानेंगे। इसका अर्थ है कि इकाई अपने दाएँ की इकाई से दस गुनी बड़ी नहीं हो कर मात्र दुगुनी बड़ी होगी। अन्तिम इकाई हमेशा की तरह साधारण इकाई खोल करती है; अंत से दूसरी इकाई 2, अंत से तीसरी इकाई 4, अंत से चौथी इकाई 8, अंत से पाँचवीं इकाई 16 आदि खोल करती है। इस तरह पहली कतार बन्द करने वाली संख्या 1010010 में निम्न साधारण इकाइयाँ होंगी :

$$64 + 16 + 2 = 82$$

क्योंकि शून्य तदनुरूप कोटियों पर इकाई की अनुपस्थिति धोत करते हैं।

संख्या 1000 की जगह (दूसरी कतार में) दशमलव प्रणाली की संख्या 8 लिखेंगे।

बाकी संख्याओं को निम्न में बदलना होगा :

$$128 + 32 + 2 = 162$$

$$16$$

$$64 + 4 = 68$$

$$128 + 8 = 136$$

$$32 + 2 = 34$$

$$16 + 1 = 17$$

82, 8, 162, 16, 68, 136, 34, 17 को याद कर लेना इतना कठिन नहीं है। इनका ज्ञान होने पर हम उन आरंभिक संख्याओं को प्राप्त कर सकते हैं, जिनसे ये बनी हैं और जो जाली की कतारों में खिड़कियों की संख्या इंगित करती हैं।

कैसे यह संभव है? उदाहरण के लिये, पहली संख्या - 82 - लें। यह देखने के लिये कि उसमें कितनी बार 2 की संख्या है, उसे 2 से विभाजित करेंगे; मिला 41; शेष नहीं है, - मतलब कि अंतिम स्थान पर शून्य है। इसके की प्राप्त 41 संख्या को पुनः 2 से विभाजित करेंगे, जिससे हमें उक्त संख्या में चौथों की कुल संख्या मिलेगी :

$$41 : 2 = 20 \text{ शेष } 1$$

इस का अर्थ है कि द्विगुण प्रणाली में 2 की कोटि पर, अर्थात् अंत से पहले के स्थान पर संख्या 1 होगी। अब 20 को 2 से विभाजित करें कि हमारी संख्या में कितने 8 हैं, का पता चले:

$$20 : 2 = 10$$

शेष नहीं बचता। अर्थात् 4 की कोटि पर शून्य होगा।

10 में 2 से भाग देने; मिलेगा बिना शेष के 5; 8 की कोटि पर शून्य होगा।

5 में 2 से भाग देने पर 2 भागफल मिलता है और 1 शेष बचता है: 16 की कोटि पर 1 होगा। अंत में 2 में 2 से भाग देकर ज्ञात करते हैं कि अगली कोटि में शून्य होगा और अंतिम कोटि में (यह 64 की कोटि है) 1 होगा।

इस प्रकार दश संख्या के सभी अंक ज्ञात हो जाते हैं:

1010010

चूंकि इसमें अंकों की संख्या सिर्फ 7 है और जानी की हर कतार में 8 घर होते हैं, स्पष्ट है कि शुरु का शून्य छोड़ा गया था। अतः कतार में खिड़कियों का कम निम्न अंकों द्वारा व्यक्त होगा:

01010010

अर्थात् खिड़कियाँ दूसरे, चौथे तथा सातवें स्थानों पर होंगी।

जैसा कि कहा गया था, गुप्त लेखन की असंख्य प्रणालियाँ हैं। हमने वाली का अध्ययन किया, क्योंकि यह गणित के साथ निकट संबंध रखती है और इस बात का अतिरिक्त प्रमाण देती है कि जीवन के असंख्य पक्ष हैं, जिनमें गणित सहायक हो सकता है।

अध्याय 7

दंत्य-संख्यायें

59. मुनाफे का सौदा. कब वह पटना घटी थी—पता नहीं। हो सकता है कि कभी घटी ही न हो। इसकी संभावना अधिक है। पर सच ही या झूठ, कहानी इतनी मनोरंजक जकर है कि उसे सुना जा सके।

1.

एक करोड़पति जब परदेस से घर लौटा, तो काफी खुश था। रास्ते में उसे एक चादमी मिला था, जिससे उसे बड़े लाभ की आशा थी।

“ऐसा भी संयोग होता है,— पर भा कर उसने बताया।—मैं ही नहीं कहते कि पैसों के पीछे पैसा भागता है। मेरे पैसों के पीछे भी पैसे भागने वाले हैं। किसने उम्मीद की थी! राह में मुझे एक अपरिचित मिला। देखने में साधारण-सा था। मैं उससे बात भी नहीं करता, पर जैसे ही उसे पता चला कि मैं पैसों वाला हूँ, खुद भावें शुरू कर दी। धीरे-धीरे बात-चीत के भंत में ऐसा मुनाफे का घंघा बताया कि मैं आवाक रह गया।

—एक सौदा,—कहता है,—तुम्हारे साथ तय करते हैं। मैं महीने भर हर दिन तुम्हें एक लाख रुबल दिया करूँगा। मुफ्त में नहीं, पर कीमत तुम्हारे सिने विल्कुल साधारण होगी।—सत्त के मुताबिक, पहले दिन मैं उसे,—कहने में हँसी भी आती है,—सिर्फ एक कोपेक दूँगा।

मुझे अपने कार्यों पर विश्वास नहीं हुआ :

- एक कोपेक ? - मैं फिर से पूछता हूँ।

- एक कोपेक, - वह कहता है। - दूसरे दिन दूसरे साख के लिये दो कोपेक दोगे।

- और धाने क्या होगा ? - मैं धैर्य खो रहा था।

- धाने यह होगा : तीसरे साख के लिये 4 कोपेक दोगे, चौथे साख के लिये 8, पाँचवें के लिये 16। इसी तरह से पूरा महीना हर दिन पिछले दिन से दुगुना कोपेक दिया करोगे।

- और इसके बाद ? - मैं पूछता हूँ।

- बस, - वह कहता है, - और कुछ नहीं चाहिये मुझे। सिर्फ बात पक्की होनी चाहिये : हर सुबह मैं एक साख रुबल लाया करूँगा और तुम मुझे वह दोगे, जो हम तय कर चुके हैं। महीने से पहले सौदा नहीं टूटना चाहिये।

चंद कोपेक के लिये लाखों दे रहा है ! यदि नोट जाली नहीं है, तो धादमी सिर-फिरा है। पर सौदा मुनाफे का है, छोड़ना नहीं चाहिये।

- ठीक है, - मैं उससे कहता हूँ। - तुम अपने साख लाया करो। अपनी और से मैं सही भुगतान किया करूँगा। पर तुम मुझे धोखा मत देना ; असली नोट लाता।

- शिंता मत करो, - वह कहता है, - कल सुबह आऊँगा।

सिर्फ एक बात का डर है : यदि नहीं आया तो ? कहीं समझ न जाय कि उसके लिये यह बहुत घाटे का सौदा है। और, कल सुबह तक इंतजार करना बड़ी बात नहीं है।

2.

दिन बीता। सबेरे-सबेरे किसी ने खिड़की खटखटायी। यह वही परिचित था, जिससे करोड़पति रास्ते में मिला था।

- पैसे निकालो, - उसने कहा। - मैं धपता जे आया हूँ।

और सचमुच में वह अजीब धादमी कमरे में आ कर पैसे निकालने लगा। नोट असली थे, जाली नहीं। उसने ठीक एक लाख गिन कर टेबल पर रख दिये और कहा :



चित्र 50. "एक लाख टपक गड़े हैं आकाश से!"

— मैं जल के मुताबिक ले धाया हूँ। अब तुम्हारी बारी है भृगतान करने की।

करोड़पति ने टेबुल पर तांबे के एक कोपेक का सिक्का रख दिया और प्रतीक्षा करने लगा। उसे डर था कि कहीं मेहमान सिक्के को देख कर अपने रुबल वापस न मांगने लगे। अपरिचित ने सिक्के को हाथों में उलट-पलट कर देखा, तौला और बटुए में रख लिया।

— कल इसी समय इंतजार करना। और हाँ, दो कोपेक का बंदोबस्त करना मत भूल जाना, — उसने कहा और चला गया।

करोड़पति को अपनी खुशनसीबी पर विश्वास नहीं हो रहा था : एक लाख रुबल छप्पर फाड़ कर आकाश से गिरे हैं! उसने फिर से रुबल गिने, भली-भाँति जाँचा — जाली तो नहीं हैं। सब ठीक था। उसने पैसे छिपा कर रख दिये। अब वह बैचैनी से अपनी सुबह का इंतजार कर रहा था।

रात को उसे संदेह होने लगा : कहीं वो डकैत तो नहीं है। बेबकूफ के रूप में जाता है। जायद देखने के लिये कि मैं पैसे कहाँ छिपा कर रखता हूँ। इसके बाद एक दिन अपने दोस्तों के साथ आ धमकेगा!

करोड़पति ने दरवाजा अच्छी तरह बंद कर लिया। शाम से डर के मारे कान लगाये खिड़की से झाँकना शुरू कर दिया। रात भर नींद

नहीं प्राप्ति। सुबह बिड़की पर खटखटाहट हुई; अपरिचित पैसों के साथ हाथिर था। उसने एक लाख गिन कर रख दिये, अपने दो कोपेक प्राप्त किये और सिक्कों को बटुए में छिपा कर चलता बना। जाते वक्त उसने कहा:

-कल चार कोपेक का बंदोबस्त करना मत भूलना।

करोड़पति फिर चुश था: दो लाख मुफ्त में मिल गये। मेहनान डकैत नहीं लगता था: कोई ताक-आंक नहीं की उसने; सिर्फ अपने कोपेकों की मांग की। सनकी है! दुनिया में और भी ऐसे लोग होते, तो समझदार लोगों का जीवन सुधर जाता।

प्रजनवी तीसरे दिन भी घाया और करोड़पति को तीसरा लाख 4 कोपेक में दे गया।

एक दिन और बीता। और चौथा लाख आठ कोपेक में मिल गया।

पाँचवा लाख भी मिला—16 कोपेक में।

इसके बाद छठा—32 कोपेक में।

सात दिनों में करोड़पति ने सात लाख रुबल प्राप्त किये और इसके लिये उसने षडा किया सिर्फ 1 कोपेक + 2 कोपेक + 4 कोपेक + 8 कोपेक + 16 कोपेक + 32 कोपेक + 64 कोपेक = 1 रुबल 27 कोपेक।

कंजूस करोड़पति को यह बहुत पसंद आया। उसे अफसोस होने लगा कि उसने दो महीनों का सौदा क्यों नहीं किया। अब तीस लाख से अधिक उसे नहीं मिलेंगे। 15 दिन भी और होते तो अच्छा था। इस सनकी से अवधि बढ़ाने के लिये कहा जाये? कहीं समझ न जाये कि मुफ्त में पैसे दे रहा है...

अपरिचित हर सुबह अपने एक लाख रुबल के साथ नियत समय पर आ जाया करता था। आठवें दिन उसे 1 रुबल 28 कोपेक मिले, नवें दिन—2 रुबल 56 कोपेक, 10-वें दिन—5 रुबल 12 कोपेक, 11-वें दिन—10 रुबल 24 कोपेक, 12-वें दिन—20 रुबल 48 कोपेक, 13-वें दिन—40 रुबल 96 कोपेक और 14-वें दिन—81 रुबल 92 कोपेक।

करोड़पति बिना हिचकिचाहट के ये पैसे दे दिया करता था: हाथिर उसे 14 लाख रुबल मिल चुके थे! और उसे सिर्फ डेढ़ सौ के करीब रुबल देने पड़े थे।

पर करोड़पति की बुधियाली अधिक दिनों तक नहीं टिकी रही :
 अब वह समझने लगा कि उसका तनकी मेहमान कोई बेवकूफ नहीं है
 और सौदा इतना लाभप्रद नहीं है, जितना शुरू में लग रहा था।
 15 दिनों बाद उसे कोपेक नहीं देने पड़ रहे थे। अब भुगतान सैकड़ों
 रुपयों में हो रहा था और अदापत्ती की राशि भयानक गति से बढ़
 रही थी। महीने के दूसरे पक्ष में करोड़पति ने चुकता किया :

15-वें नाख के लिये	163	रुबल	84	कोपेक,
16-वें » » »	327	»	68	» ,
17-वें » » »	655	»	36	» .
18-वें » » »	1310	»	72	» .
19-वें » » »	2621	»	44	» .

जो भी हो, करोड़पति अपने को कोई घाटे में महसूस नहीं कर
 रहा था : उसे कुल पाँच हजार से कुछ अधिक देने पड़े थे और उसने
 प्राप्त किये 18 नाख रुबल।

पर मुताफा दिन-प्रतिदिन घट रहा था और बहुत ही तेजी से घट
 रहा था।

घाने के भुगतान इस प्रकार है :

20-वें नाख के लिये	5242	रुबल	88	कोपेक,
21-वें » » »	10485	»	76	» .
22-वें » » »	20971	»	52	» .
23-वें » » »	41943	»	04	» .
24-वें » » »	83886	»	08	» .
25-वें » » »	167772	»	16	» .
26-वें » » »	335544	»	32	» .
27-वें » » »	671088	»	64	» .

जितना मिलता था, उससे कहीं अधिक भुगतान करना पड़ रहा
 था। वहाँ रुक जाना अच्छा होता, पर सौदा तोड़ा नहीं जा सकता
 था।

घाने स्थिति और बिगड़ती गयी। करोड़पति काफी देर से समझा
 कि सबनबी ने उसे कूरता के साथ धोखा दिया है : वह जितना देता
 है, उससे कई गुना अधिक पायेगा...

28-वें दिन से करोड़पति जानों में भुगतान कर रहा था। बाखिरी दो दिनों के उसे पूरा दिवानिया बना दिया। ये रूखी भुगतान की ये विभाव राशिर्मा :

28-वें लाख के लिये	1342177	स्वल	28	कोपेक,
29-वें » » »	2684354	»	56	» .
30-वें » » »	5368709	»	12	» .

जब बाखिरी बार मेहमान ने बिदा ली, करोड़पति ने हिसाब लगाना शुरू किया कि "मुफ्त" में मिलने वाले 30 लाख के लिये उसे कितने पैसे घटा करने पड़े। पता चला कि घजनवी ने प्राप्त किये :

10 737 418 स्वल 23 कोपेक।

करीब 107 लाख। .. और यह शुरू हुआ था सिर्फ एक कोपेक से। अपरिचित यदि 3 लाख भी प्रतिदिन देता, घाटे में नहीं रहता।

3.

यह कहानी खत्म करने के पहले हम देख लें कि करोड़पति के नुकसान का हिसाब शीघ्र कैसे प्राप्त किया जा सकता है, अर्थात् दूसरे शब्दों में, न्यूनतम समय में निम्न संख्या-क्रम का योगफल कैसे प्राप्त किया जा सकता है :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{आदि.}$$

इन संख्याओं की एक विशेषता इस प्रकार है :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 + 1 \\ 4 &= (1 + 2) + 1 \\ 8 &= (1 + 2 + 4) + 1 \\ 16 &= (1 + 2 + 4 + 8) + 1 \\ 32 &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1 \text{ आदि।} \end{aligned}$$

हम देखते हैं कि क्रम की हर संख्या अपनी पिछली सभी संख्याओं के कुल योग से इकाई अधिक है। अतः जब आरंभ से किसी संख्या तक

(उदाहरण के लिये 1 से 32768 तक) के संख्या-क्रम का योग ज्ञात करना हो, तो यह होगा: 32768 से पहले तक की संख्याओं का योग, धीरे-धीरे इस संख्या से इकाई कम (32768 - 1) की संख्या, और इस संख्या (32768) का योग। उत्तर होगा: 65535।

इस तरीके से कंबूस करोड़पति के नुकसान का बहुत जल्द हिसाब लगाया जा सकता है, यदि हम जान जायें कि साबिरी दिन उसने कितना भुगतान किया था। साबिरी भुगतान था: 5,368,709 स्वल्प 12 कोपक।

घट: कुल भुगतान $(5,368,709 \text{ 12} - 1) + (5,368,709 \text{ 12})$
कोपक = 10,737,418 स्वल्प 23 कोपक।

60. शहर में अफवाह. आसन्न होता है कि शहर में अफवाहें कितनी जल्दी फैलती हैं। कभी-कभी किसी बात के दो घंटे भी नहीं बीतते और उसकी खबर सारे शहर को हो जाती है। जिस घटना के पद गवाह थे, उसका ज्ञान जल्द ही पूरे शहर को हो जाता है। यह समाधारण नति आश्चर्यजनक और रहस्यमय लगती है।

पर यदि हिसाब लगाया शुरू करें, तो स्पष्ट हो जायेगा कि इसमें कोई जादू की बात नहीं है: यह संख्याओं की विशेषताओं का फल है, अफवाह के किसी गुण-धर्म का नहीं।

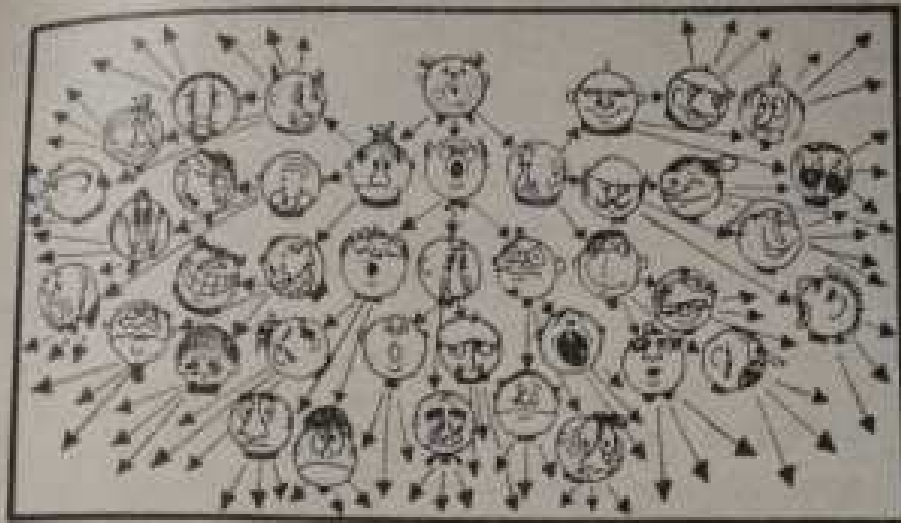
उदाहरण के लिये एक अफवाह का प्रसारण देखें।

1.

एक छोटे शहर में, जिसकी जनसंख्या 50 हजार है, एक व्यक्ति 8 बजे सुबह राजधानी से कोई खबर लाता है और जहाँ वह रहता है, सिर्फ तीन स्थानीय व्यक्तियों को बताता है। मान लें कि इसमें 15 मिनट लगे।

इस प्रकार सवा घाठ बजे शहर में यह खबर सिर्फ चार व्यक्ति जानते थे: प्रागनुक और तीन स्थानीय लोग।

जानते के बाद तीनों में से प्रत्येक तीन-तीन अन्य लोगों को बताने चल पड़ते हैं। इसमें भी 15 मिनट लगते हैं। अर्थात् आधे घंटे में खबर $4 + (3 \times 3) = 13$ व्यक्ति जान लेते हैं।



चित्र 51. अफवाह का फैलना।

अगले 15 मिनटों में ये नौ नये व्यक्ति अपने तीन-तीन मित्रों तक उक्त खबर पहुँचाने में सफल हो जाते हैं। अतः पीले नी बजे खबर का ज्ञान

$$13 + (3 \times 9) = 40 \text{ लोगों को हो जाता है।}$$

यदि खबर इसी गति से शहर में फैलती जाये, अर्थात् हर व्यक्ति उसे सुनने के बाद 15 मिनटों में अपने तीन परिचितों को बता दे, तो खबर के प्रसार का काल-क्रम निम्न होगा:

$$9 \text{ बजे खबर जानते हैं } 40 + (3 \times 27) = 121 \text{ व्यक्ति,}$$

$$9 \frac{1}{4} \text{ » » » » } 121 + (3 \times 81) = 364 \text{ » .}$$

$$9 \frac{1}{2} \text{ » » » » } 364 + (3 \times 243) = 1093 \text{ » .}$$

इस प्रकार, शहर में खबर आने के ठेढ़ घंटे बाद उसे लगभग 1100 व्यक्ति जान लेते हैं। 50000 की जनसंख्या वाले शहर के लिये यह संख्या कुछ अधिक नहीं लगती। आप सोचते होंगे कि जबतक सब लोग इसे जान जायेंगे, काफी अधिक समय बीत जायेगा। पर देखें, आने बात कैसे फैलती है:

$$9 \frac{3}{4} \text{ बजे खबर जानते हैं } 1093 + (3 \times 729) = 3280 \text{ व्यक्ति,}$$

$$10 \text{ » » » » } 3280 + (3 \times 2187) = 9841 \text{ » .}$$

15 मिनट घोर धीतने पर घाघे से अधिक लोग जान जायेंगे:

$$9841 + (3 \times 6561) = 29524$$

इसका धर्म है कि साढ़े इन के कुछ पहले गहर का हर व्यक्ति इस खबर को जान लेगा, जो घाठ बजे सिर्फ 1 व्यक्ति को ज्ञात थी।

2.

अब देखें कि उपरोक्त गणना किस प्रकार की गयी है।

सारल: हमे निम्न संख्या-क्रम का योग प्राप्त करना पड़ा है:

$$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) + \text{आदि।}$$

योगफल जानने की वैसे कोई संक्षिप्त विधि है या नहीं, जिसकी सहायता से हमने संख्या-क्रम $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ आदि का योगफल प्राप्त किया था? ऐसी विधि प्राप्त की जा सकती है, यदि हम योग्य संख्याओं की निम्न विशेषता पर विचार करें:

$$1 = 1$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$9 = (1 + 3) \times 2 + 1$$

$$27 = (1 + 3 + 9) \times 2 + 1$$

$$81 = (1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1 \text{ आदि।}$$

दूसरे शब्दों में: क्रम की हर संख्या अपनी सभी पिछली संख्याओं के योग के दुगुने से इकाई अधिक है।

निष्कर्ष यह है कि 1 से किसी संख्या तक इस क्रम का योग ज्ञात करने के लिये इसी संख्या में इससे इकाई कम संख्या का आधा जोड़ देना पर्याप्त रहेगा।

उदाहरण के लिये,

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

$$\text{क्रम का योग} = 729 + \frac{729-1}{2} = 729 + 364 = 1093 \text{ होगा।}$$

3.

हमारे उदाहरण में प्रत्येक नगर-निवासी खबर सिर्फ तीन लोगों तक पहुँचाता है। यदि निवासी अधिक गण्ड होते और तीन की बजाय पाँच व्यक्तियों को खबर सुनाते तो श्रुति और भी जल्द फैल गयी होती।

पाँच लोगों तक खबर पहुँचाने की स्थिति में श्रुति-प्रसारण का काल-कम निम्न होता :

$$\begin{aligned}
 8 \text{ बजे} & \dots\dots\dots = 1 \text{ व्यक्ति,} \\
 8\frac{1}{4} & \dots\dots\dots 1 + 5 = 6 \quad \gg \quad . \\
 8\frac{1}{2} & \dots\dots\dots 6 + (5 \times 5) = 31 \quad \gg \quad . \\
 8\frac{3}{4} & \dots\dots\dots 31 + (25 \times 5) = 156 \quad \gg \quad . \\
 9 & \dots\dots\dots 156 + (125 \times 5) = 781 \quad \gg \quad . \\
 9\frac{1}{4} & \dots\dots\dots 781 + (625 \times 5) = 3906 \quad \gg \quad . \\
 9\frac{1}{2} & \dots\dots\dots 3906 + (3125 \times 5) = 19531 \quad \gg \quad .
 \end{aligned}$$

सुबह पाँचे दस बजे के कुछ पहले ही खबर नगर के 50000 लोगों को ज्ञात हो जायेगी।

श्रुति-प्रसारण और भी जल्द होता, यदि हर व्यक्ति 10 अन्य लोगों को खबर सुनाता। इस हालत में हम निम्न शीघ्र बढ़ने वाला, द्रुत-वर्धक संख्या-क्रम प्राप्त करते :

$$\begin{aligned}
 8 \text{ बजे} & \dots\dots\dots = 1, \\
 8\frac{1}{4} & \dots\dots\dots 1 + 10 = 11, \\
 8\frac{1}{2} & \dots\dots\dots 11 + 100 = 111, \\
 8\frac{3}{4} & \dots\dots\dots 111 + 1000 = 1111, \\
 9 & \dots\dots\dots 1111 + 10000 = 11111.
 \end{aligned}$$

स्पष्ट है कि अगली संख्या 111111 होगी। अर्थात् सारा नहर 10 बजे के कुछ ही बाद समाचार से अवगत हो जायेगा। श्रुति लगभग एक घंटे में प्रसारित हो जाती है।

61. सस्ती सायकिलों का हिमपाव. कांति-पूर्व हमारे यहाँ और विदेशों में, जहाँ चायद सब भी है, ऐसे व्यापारी होते थे, जो अपना खराब माल बेचने के लिये बसबस नयी-नयी तिकटोंमें निकाला करते थे। शुरू करते थे घड़वारी और पत्रिकाओं में विज्ञापनों से। ऐसा एक विज्ञापन हम उदाहरण के लिये प्रस्तुत करते हैं:

10 रुबल में सायकिल !

मात्र 10 रुबल खर्च कर हर घावमी
एक सायकिल का मालिक
बन सकता है!

50 रुबल की जगह 10 रुबल !
खरीद की गतें मुफ्त भेजी जाती हैं।

निरसदिह, बहुत से लोग इस आकर्षक विज्ञापन के लालच में पड़ कर इस समाधारण खरीद की गतें मागने लगते थे। उत्तर में उन्हें एक परिचय-पत्र भेजा जाता था, जिससे निम्न बातें ज्ञात होती थीं।

10 रुबल में सायकिल नहीं, बल्कि 4 टिकटें भेजे जाते थे। इन्हें 10 रुबल की दर से अपने परिचितों के बीच बेचना पड़ता था। प्राप्त 40 रुबल उक्त कंपनी को भेजना पड़ता था और तब वहाँ से सायकिल घातो थी। बर्नात् खरीददार ने सचमुच अपनी जेब से सिर्फ 10 रुबल खर्च किये। बाकी 40 रुबल उसकी जेब के नहीं होते थे। यह सच है कि टिकटें बेचने के लिये उसे कुछ भाग-दोड़ करनी पड़ती थी, पर यह धम नगण्य था और वह इस पर ध्यान नहीं देता था।

यह टिकट किस लिये था? 10 रुबल देकर उसे खरीदने वाले को क्या लाभ होता था? इस टिकट के बदले में कंपनी से और घाने प्रसारण के लिये पाँच और टिकट मिलते थे; दूसरे शब्दों में, टिकट खरीदने वाले को सायकिल के लिये 50 रुबल एकल करने का अवसर दिया जाता था। टिकटें बेच कर प्राप्त पैसे जमा करने पर उसे सायकिल मिलती थी, जिसके लिये अपनी जेब से उसे 10 रुबल ही खर्च करने पड़े थे। टिकटों के नये खरीददार कंपनी से पुनः पाँच-पाँच टिकटें प्राप्त करते थे।

यदि सरसरी निगाह से देखें तो इसमें कोई धोखा नजर नहीं आता। वित्तपोषण का बाका पूरा ही जाता था: सामकिल सचमुच सिर्फ 10 रुबल में मिल जाती थी। और कंपनी को भी घाटा नहीं था, - वह अपने माल को पूरी कीमत बसूल कर लेती थी। फिर भी कोई शक नहीं कि यह एक घोखेबाजी थी। हमारे यहाँ इस ठगी को "हिमघाव" का नाम दिया गया था। हिमघाव में भाग लेने वाले असंख्य लोग, जो अपने टिकट नहीं बेच पाते थे, घाटे में रहते थे। दर घमेल यही वे लोग थे, जो 10 रुबल में खरीदी गयी सामकिलों की बाकी कीमत घटा करते थे। कभी न कभी वह क्षण आ ही जाता था, जब लोग अपने टिकटों के लिये खरीददार नहीं ढूँढ़ पाते थे। आप यह समझ जायेंगे, यदि कागज-पेंसिल के साथ बैठ कर देखें कि हिमघाव में भाग लेने वाले लोगों की संख्या कितनी तेजी से बढ़ती है।

खरीददारों का पहला समूह, जो सीधे कंपनी से टिकटें प्राप्त करता है, उन्हें सामानी से बेच लेता है। इस समूह में से प्रत्येक व्यक्ति अपने टिकट चार अन्य व्यक्तियों के हाथ सुपुर्ब करता है।

ये चार व्यक्ति अपने टिकट 4×5 , अर्थात् 20 अन्य व्यक्तियों को बेचेंगे। माना कि 20 खरीददार मिल जाते हैं।

हिमघाव घागे बढ़ता है: टिकटों के 20 नये खरीददार $20 \times 5 = 100$ अन्य व्यक्तियों को टिकटें बेचेंगे। गुरु से अब तक हिमघाव में $1 + 4 + 20 + 100 = 125$ व्यक्ति खिंच चुके हैं। इनमें से 25 लोग सामकिल प्राप्त कर चुके हैं और बाकी लोग आशा कर रहे हैं। यह घाना उन्हें 10 रुबल में मिली है।

अब हिमघाव परिचितों के दायरे से निकल कर शहर में फैलता है, पर यहाँ टिकट के नये खरीददारों को ढूँढ़ना कठिन होता जाता है। ये आखिरी सौ व्यक्ति 500 लोगों को टिकट बेचेंगे और ये 500 व्यक्ति 2500 नये शिकार की खोज में निकलेंगे। शहर जल्द ही टिकटों की बाढ़ से ग्रस्त हो जाता है और उनके नये खरीददारों को ढूँढ़ना असंभव सा हो जाता है।

आप देखते हैं कि हिमघाव की चपेट में आये लोगों की संख्या का वर्धन उन्हीं नियमों के अनुसार होता है, जिनके बारे में हम श्रुति-

प्रसारण के अध्ययन के वक्त बातें कर रहे थे। हिमघावन की स्थिति में हमें संख्याओं का निम्न पिरामिड मिलता है:

1
4
20
100
500
2500
12500
62500

यदि शहर बड़ा है और इसमें सायकिल पर चढ़ सकने वाले लोगों की संख्या $62\frac{1}{2}$ हजार है, तो 8 वें दौर पर हिमघाव का ह्रास ही जाना चाहिये। सब उसकी चपेट में धा जायेंगे। पर सायकिल सिर्फ पाँचवे भाग लोगों के पास होगी। बाकी $\frac{1}{2}$ लोगों के पास सिर्फ टिकट होंगे, जिन्हें सब बेचा नहीं जा सकता।

अधिक जनसंख्या वाले शहर में, या किसी आधुनिक राजधानी में, जिनमें निवासियों की संख्या करोड़ों तक पहुँचती है, संतुष्टि का क्षय चंद ही और दौरों के बाद धा सकता है। संख्याओं के हमारे पिरामिड की घनत्व सीढ़ियाँ इस प्रकार हैं:

312500
1562500
7812500
39062500

जैसा कि देखते हैं, 12 वें दौर पर हिमघाव की चपेट में एक पूरा राज्य धा जा सकता है और इसकी जनसंख्या का $\frac{1}{2}$ भाग घोखा जायेगा।

यह देखें कि कंपनी हिमघाव के माध्यम से क्या करती है। वह $\frac{1}{2}$ निवासियों को बाकी $\frac{1}{2}$ निवासियों द्वारा खरीदे गये माल की कीमत चुकता करने को विवश करती है। दूसरे शब्दों में, यह चार नागरिकों को पाँचवे की संपत्ति बढ़ाने पर विवश करती है। इसके अतिरिक्त, उसे माल बेचने के लिये अनगिनत एजेंट मुफ्त में मिल जाते हैं। हमारे

लेखकों ने से एक से इस छोटे का बिल्कुल उपयुक्त नाम दिया है : "दस्तावेजों का हिमघाव"।* ऐसे घर्षों के पीछे दैत्य-सन्ध्यामें लिपि होती है। वे उन लोगों को इतित करती हैं, जो घोषेवाजों से से अपने हितों को सुरक्षित रखने के लिये संकल्पित का प्रयोग करना नहीं जानते।

62. इनाम. किंवदन्ती के अनुसार घटना अतास्त्रियों पूर्व प्राचीन रोम में घटी थी।**

1.

सम्राट की आज्ञा से सेनापति तेरेंसी ने देशों की विजय-यात्रा पूरी की और अपार धन-राशि के साथ रोम लौटा। राजधानी में आते ही उसने सम्राट से मिलने की आज्ञा-मांगी।

सम्राट ने प्रेम से उसका सत्कार किया, उसकी युद्ध-सेवाओं के लिये इन्क़ाब दिया और इनाम के रूप में उसे सीनेट में उच्च स्थान देने का वचन दिया।

पर तेरेंसी को यह नहीं चाहिये था। उसने इन्कार करते हुए कहा :

-जहाँपनाह, तुम्हारे राज्य की शक्ति बढ़ाने तथा तुम्हारा पक्ष फैलाने के लिये मैंने अनगिनत लड़ाइयाँ लड़ी और विजय प्राप्त किये। मैं मरने से नहीं डरता। यदि मेरे पास एक नहीं अनेक जीवन होते, मैं सब तुम्हारे लिये न्योछावर कर देता। पर मैं युद्ध से थक गया हूँ। जीवन इन चुका है और धमनियों में रक्त की गति मंद हो गयी है। अब समय आ गया है, जब अपने पितामहों के घर में विधाम किया जाय और गृहस्थ जीवन का आनंद लिया जाये।

-तुम्हें क्या चाहिये, तेरेंसी? -सम्राट ने पूछा।

-धर्मदान करें, महाराज! युद्ध-जीवन की लम्बी अवधि में अपनी तलवार से शत्रुओं का रक्त बहाने में लीन मैं अपने लिये कोई धन-संचय नहीं कर पाया। मैं निर्धन हूँ, महाराज...

*ई० इ० यासींसकी।

**इंग्लैंड के एक व्यक्तिगत पुस्तकालय में प्राप्त एक पुरानी लैटिन हस्तलिपि का यह स्वतंत्र पुनर्लेखन है।

-बोलो, बहादुर तेरेंसी।

-छपने इस नम्र सेवक को यदि तुम इनाम देना चाहते हो,-
सेनापति ने कहा,-तो तुम्हारी ध्यायुता से मैं छपने बाकी दिन घर
में चैन से बिठाना चाहूँगा। मुझे मान नहीं चाहिये, सर्वशक्ति संपन्न
सीनेट में स्थान नहीं चाहिये। मैं राज्य-शक्ति और सामाजिक जीवन से
दूर होना चाहता हूँ, ताकि निश्चिंत विद्याम कर सकूँ। महाराज, मुझे
बाकी दिन गुजारने के लिये धन चाहिये।

सम्राट, किंवदंती कहती है, कंजूस था। वह अपने लिये धन जमा
करता था और दूसरों पर बहुत कंजूसी से खर्च करता था। सेनापति
की प्रार्थना से वह सोच में पड़ गया।

-कितना धन चाहिये तुम्हें? -उसने पूछा।

-इस लाख दीनार, महाराज।

सम्राट फिर सोच में डूब गया। सेनापति सर झुकाये प्रतीक्षा करता
रहा।

अंततोगत्वा, सम्राट ने कहना शुरू किया:

-पराकभी तेरेंसी! तुम महान योद्धा हो और तुम्हारे चीरतापूर्ण
काव्यों के लिये तुम्हें उदार पारितोषिक मिलने चाहिये। कल दोपहर
यहाँ तुम मेरा निर्णय सुनोगे।

2.

दूसरे दिन उक्त समय पर सेनापति दरबार में उपस्थित हुआ।

-नमस्कार तुम्हें, बहादुर तेरेंसी! -सम्राट ने कहा।

तेरेंसी ने नम्रतापूर्वक सर झुका कर कहा:

-मैं तुम्हारा निर्णय सुनने आया हूँ, महाराज। तुमने उदार हृदय
से इनाम देने का वचन दिया था।

-मैं नहीं चाहता कि इतने महान योद्धा को इतनी छोटी रानि
इनाम में दी जाये। मेरे वचन सुनो। मेरे खजाने में 50 लाख धान *
है। अब ध्यानपूर्वक सुनो। तुम खजाने में जाओगे और वहाँ से एक
घात लाकर मेरे पैरों के पास रख डोगे। दूसरे दिन पुनः खजाने में

* ताँबे का छोटा सिक्का, दिनार का पाँचवाँ घंसा।

जाओगे और पहले सिक्के से दुगुना बड़ा सिक्का जाकर मेरे पैरों के पास रखोगे। तीसरे दिन 4 ग्राम के तुल्य सिक्का लोगे, चौथे दिन 8 ग्राम के तुल्य, पाँचवें दिन 16 ग्राम के तुल्य। तुम्हारा सिक्का हर दिन पिछले दिन से दुगुना बड़ा होगा। मैं भ्रामा देता हूँ कि खजाने से प्रतिदिन तुम्हारे लिये आवश्यक मूल्य का सिक्का रखा रहे। जबतक तुमने शक्ति है, तुम खजाने से सिक्के ले जाया करोगे। इमारा कोई इतने तुम्हारी सहायता न करे। जब तुम देखोगे कि खुद नहीं उठा सकते, छोड़ दोगे। इमारा समझौता टूट जावेगा। पर जो सिक्के तुम मेरे पैरों तक ला चुके होंगे, तुम्हारे पास रहें वे ही तुम्हारा इनाम होंगे।

तेरेंसी हर शब्द ध्यान से सुन रहा था।

उसकी घाँटों के सामने एक से एक बड़े सिक्कों की धपार राशि कौंध रही थी, जिन्हें अपनी कल्पना में वह खजाने से उठा कर अपने घर ले जाने वाला था।

— मैं तुम्हारी दयालुता से संतुष्ट हूँ, महाराज, — उसने प्रसन्न हृदय से कहा। — तुम्हारा इनाम सत्य ही बड़ा है।

3.

तेरेंसी का राज्य-कोष में जाना शुरू हो गया। खजाना दरबार से निकट था और प्रथम सिक्कों को सम्राट तक लाने में कोई कठिनाई नहीं हुई।

पहले दिन उसने खजाने से सिर्फ एक ग्राम लिया। यह छोटा सा सिक्का था, जिसका व्यास 21 मि० मी० था और वजन 5 ग्राम।

इस वजन से दुगुने, चौगुने, षष्ठगुने, 16-गुने और 32-गुने भारी दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवें तथा छठे सिक्कों को भी लाना आसान था।

सातवाँ सिक्का आधुनिक इकाईयों में 320 ग्राम का था और उसका व्यास या $8\frac{1}{2}$ से० मी० (या सही-सही: 84 मि० मी०)*

* यदि सिक्का साधारण सिक्के से 64 गुना बड़ा है, तो चौड़ाई और और मुटाई में वह सिर्फ चार गुना बड़ा होगा, क्योंकि $4 \times 4 \times 4 = 64$ । यह ध्यान में रखें। इस तथ्य की आगे जरूरत पड़ेगी।



चित्र 52. सतरहवीं सिक्का ।

आठवें दिन तेरेंसी को खजाने से 128 चांस-सिक्कों के बराबर का सिक्का लाना पड़ा। उसका वजन था 640 ग्राम और उसकी चौड़ाई थी $10\frac{1}{2}$ से० मी०

नवें दिन तेरेंसी सम्राट के चरणों तक 256 सिक्कों के तुल्य सिक्का उठा कर लाया। उसका व्यास था 13 से० मी० और वजन $1\frac{1}{4}$ कि० ग्राम।

बारहवें दिन सिक्के का व्यास 27 से० मी० था और वजन $10\frac{1}{4}$ कि० ग्राम।

सम्राट, जो अबतक सेनापति के साथ मैत्री निभा रहा था, अब अपनी जीत की खुशी नहीं छिपा पा रहा था। वह देख रहा था कि 12 दोर पूरे हो चुके हैं और अभी तक खजाने से सिर्फ दो हजार से कुछ अधिक तब्रि के सिक्के निकले हैं।

तेरहवें दिन बहादुर तेरेंसी को 4096 सिक्कों के तुल्य सिक्का मिला। उसका व्यास 34 से० मी० था और वजन $20\frac{1}{2}$ कि० ग्राम।

बीसवें दिन तेरेंसी को 41 कि० ग्राम भारी सिक्का उठाना पड़ा। इसका व्यास 42 से० मी० था।

—तुम बक तो नहीं गये, मेरे बहादुर तेरेंसी? —सम्राट ने मुस्कु-राहट छिपाते हुए पूछा।

-बाहों, महाराज - उदास सीमा पीछे हुए सेनापति ने उत्तर दिया।

दशहवाँ दिन आया। इस बार तेरेंसी का बोज़ भारी था। 16384 इकाई सिक्कों का एक पिण्ड सिक्का लेकर वह धीरे-धीरे सन्नट के पास जा रहा था। उसकी चौड़ाई 53 से० मी० थी और वजन था 80 कि० ग्राम - एक हट्टे-कट्टे घोड़ा का वजन था यह।

सोचते-सोचते दिन सेनापति बोज़ से दबा लड़ाखड़ा रहा था। इस बार उसका सिक्का 32768 इकाई सिक्कों के बराबर था। उसका वजन 164 कि० ग्राम था और व्यास था 67 से० मी०।

सेनापति निःशक्त हाँफ रहा था। सन्नट के हाँठों पर मुस्तुराहट थी।

जब अगले दिन तेरेंसी दरबार में आया, लोग अपनी हँसी नहीं रोक सके। तेरेंसी अब अपना बोज़ उठा नहीं पा रहा था, अतः वह सिक्के को धीरे-धीरे लुढ़काते हुए चल रहा था। इस सिक्के की चौड़ाई थी 84 से० मी० और वजन था 328 कि० ग्राम। यह 65536 इकाई सिक्कों के बराबर था।

अठारहवाँ दिन तेरेंसी के धन में वृद्धि का अंतिम दिन था। इस दिन के बाद से उसकी सिक्के के साथ खजाने से दरबार तक दौड़ लगाने बंद हो गयी। इस बार उसे 131072 इकाई सिक्कों के तुल्य सिक्का मिला था। उसका व्यास एक मीटर से अधिक था और वजन था - 655 कि० ग्राम। तेरेंसी अपनी सारी ताकत से भाले को नीचे की तरफ इस्तेमाल करता हुआ सिक्के को धकेल रहा था। सिक्का धीरे धीरे के साथ सन्नट के पैरों के पास लुढ़क गया।

तेरेंसी बिल्कुल थक चुका था।

-बस, अब काफी है...,- उसके मुँह से निकला।

सन्नट मुश्किल से अपनी हँसी रोक सका। उसकी चाल पूरी तरह सफल हो चुकी थी। उसने खजांची को हिसाब लगाने की आज्ञा दी कि तेरेंसी को कितने बांस मिलने चाहिये।

खजांची ने तुरत आज्ञा का पालन किया और घोषणा की:

-महाराज, तुम्हारी उदारता से पराक्रमी वीर तेरेंसी इनाम में 262143 बांस प्राप्त करता है।

इस प्रकार कंगूब सभ्राट ने तेरेंती द्वारा मांगी गयी रकम का लगभग 20-वाँ भाग ही दिया।
 खजांची के हिसाब को जबिं। साथ-साथ सिक्कों का वजन भी देखने हैं। तेरेंती खजांचे से सामा :

1 दिन	1 घास जिसका वजन था	5 घास,
2 >	2 > > > >	10 >
3 >	4 > > > >	20 >
4 >	8 > > > >	40 >
5 >	16 > > > >	80 >
6 >	32 > > > >	160 >
7 >	64 > > > >	320 >
8 >	128 > > > >	640 >
9 >	256 > > > >	1 कि० घा० 280 >
10 >	512 > > > >	2 > 560 >
11 >	1024 > > > >	5 > 120 >
12 >	2048 > > > >	10 > 240 >
13 >	4096 > > > >	20 > 480 >
14 >	8192 > > > >	40 > 960 >
15 >	16384 > > > >	81 > 920 >
16 >	32768 > > > >	163 > 840 >
17 >	65536 > > > >	327 > 680 >
18 >	131072 > > > >	655 > 360 >

इस प्रकार के संख्या-क्रमों का योग निकालना हम जानते हैं। पृष्ठ 96 पर दिये गये नियम के अनुसार दूसरे स्तंभ का योग होता है 262143। तेरेंती ने सभ्राट से 10 लाख बीनार, अर्थात् 5000000 घास मांगे थे। पर उसे $5000000 : 262143 \approx 19$ गुना कम सिक्के मिले।

63. शतरंज के बारे में एक किंवदंती। शतरंज की गणना प्राचीनतम खेलों में होती है। बतावियों से लोग शतरंज खेलते या रहे हैं, इसलिये कोई आश्चर्य नहीं कि उस के बारे में विभिन्न अनागत किंवदंतियाँ प्रचलित हैं। उनमें से बहुतों की सत्यता बहुत पुरानी होने के कारण जांची नहीं जा सकती है।

देती ही एक किंबदन्ती हम सुनाना चाहते हैं। इसे समझने के लिये शतरंज का खेल जानना कोई आवश्यक नहीं है। पर्याप्त होगा, यदि आप जानते हैं कि शतरंज एक वर्गाकार गते या तख्ते पर खेला जाता है, जो 64 वर्गों में बंटा होता है। इन्हें "घर" कहते हैं। ये घर बारी-बारी से काले और सफेद रंग के होते हैं।

1.

शतरंज का आविष्कार भारत में हुआ था। जब कर्ना के राजा तिवराम को खेल दिखाया गया, वे उसकी तर्क-संगतता तथा गोटियों की स्थितियों की अपार विविधता से अत्यंत प्रसन्न हुए।

जब उन्हें पता चला कि आविष्कारक उन्हीं के राज्य का निवासी है, उन्होंने उसे खुद अपने हाथों इनाम देने के लिये बुलाया।

आविष्कारक, उसका नाम सेता था, राजा के पास आया। उसके वस्त्र साधारण थे। वह विद्वान था और शिष्यों को पढ़ा कर जीविका-अर्जन करता था।

— मैं तुम्हारे समूठे खेल के लिये तुम्हें यथोचित पारितोषिक देना चाहता हूँ, सेता।— राजा ने कहा।

विद्वान ने सर झुका लिया।

— मेरे पास पर्याप्त धन है। मैं तुम्हारी कोई भी इच्छा पूरी कर सकता हूँ,— राजा ने फिर कहा।— मांगो, जो तुम्हारी इच्छा हो। सेता चुप रहा।

— डरो मत,— राजा ने हिम्मत बंधायी।— तुम अपनी इच्छा बताओ। मैं उसे पूरी करने के लिये सब कुछ न्योछावर कर दूंगा।

— तुम्हारी उदारता महान है, राजन। पर मुझे सोचने के लिये समय दो। कल अच्छी तरह सोचकर तुम्हें अपना अनुरोध बताऊँगा।

जब दूसरे दिन सेता सिंहासन के निकट पहुँचा, उसके अनुरोध की नभता ने राजा को आश्चर्यचकित कर दिया।

— राजन,— सेता ने कहा,— आप मुझे शतरंज के पहले घर के लिये गेहूँ का एक दाना दिलाने की आज्ञा दें।

— क्या साधारण गेहूँ का एक दाना?— राजा ने आवाक होकर पूछा।



चित्र 53. "दूसरे घर के लिये दो दाने दिलाने की आज्ञा दें।"

-हाँ, राजन। दूसरे घर के लिये 2 दाने दिलाने की आज्ञा दें, तीसरे के लिये 4, चौथे के लिये-8, पाँचवें के लिये-16, छठे के लिये-32...

-बस करो, -राजा ने क्रोधित होकर उसे बीच ही में रोक दिया। -तुम्हें शतरंज के सारे 64 घरों के लिये दाने मिल जायेंगे। हर घर में दानों की संख्या पिछले घर से दुगुनी होनी चाहिये -यही तुम्हारी इच्छा है न? पर यह जान लो कि ऐसा श्रद्ध इनाम मांग कर तुम मेरी उदारता का अपमान कर रहे हो। गुरु होने के नाते तुम अपने राजा की दयानुता के प्रति धादर-भाव का उत्कृष्ट उदाहरण प्रस्तुत कर सकते थे। जाओ। मेरे सेवक तुम्हारे गेहूँ की बोरी तुम्हें दे देंगे।

सेता मुस्कुराया और दरबार के बाहर महल के द्वार पर प्रतीक्षा करने लगा।

2.

दीपहर भोजन के समय राजा को शतरंज के आविष्कारक की याद आयी और वह जानने के लिये किसी को भेजा कि पागल सेता अपना श्रद्ध इनाम लेकर गया या नहीं।

- राजन, - उत्तर मिला, - तुम्हारी आज्ञा पूरी हो रही है। दरबार के गणितज्ञ दानों की आवश्यक संख्या की गणना कर रहे हैं।

राजा को भुफुटियां तन लगीं। वह इस बात का आदी नहीं था कि उस की आज्ञाओं इतनी मंद गति से पूरी हों।

जाम को सोने के पहने जब राजा ने फिर विज्ञासा की तो उत्तर मिला :

- राजन, तुम्हारे गणितज्ञ गणना में व्यस्त हैं। आज्ञा है कि कल सुबह तक काम खत्म हो जावेगा।

- इतनी देर क्यों लगा रहे हैं? - क्रोधित राजा ने पूछा। - कल तीव्र दृष्टने के पहने सेता को उसके एक-एक दाने मिल जाने चाहिये। मैं दो बार आज्ञा नहीं देता।

सुबह राजा को बताया गया कि मुख्य गणितज्ञ एक महत्त्वपूर्ण बात कहना चाहता है।

राजा ने उसे घाने की अनुमति दे दी।

- इसके पहले कि तुम अपनी बात कहो, - राजा ने कहा, - मैं जानना चाहूंगा कि सेता को उसका सूत्र इनाम मिला या नहीं, जो उसने मांगा था।

- इसी के लिये तो मैं सुबह-सुबह घाने का सहस्र कर पाया हूँ, - बृद्ध गणितज्ञ ने उत्तर दिया। - हम लोगों ने तिष्कपट भाव से दानों की पूर्ण संख्या, जो सेता चाहता है, निर्धारित कर ली है। संख्या इतनी बड़ी है कि...

- कितनी भी बड़ी क्यों न हो, - राजा ने धमंड के साथ कहा, - मेरा भंडार कम नहीं होगा। सबन दिया जा चुका है और उसे इनाम मिलनी चाहिये...

- तुम्हारे बश की बात नहीं है, राजन, इस तरह की इच्छायें पूरी करना। तुम्हारे सभी भंडारों में इतना गेहूँ नहीं है, जितना सेता ने मांगा है। पूरे राज्य के भंडारों को मिलाकर भी इतना नहीं होगा। सारी पृथ्वी पर भी गेहूँ के इतने दाने नहीं होंगे। यदि प्रतिज्ञा निभाना ही चाहते हो, तो सारी धरती को खेतों में परिणत करने की आज्ञा दो, सागरों को सुखा देने की आज्ञा दो, सुदूर उत्तर को आवृत्त रखने वाले हिम को गला देने की आज्ञा दो। यदि पृथ्वी के एक-एक अंगुल

स्वान पर गेहूँ बो दें और सारी फसल सेता को दें, तब उसे उसका मूहमांगा इनाम प्राप्त होगा।

प्राणव्येचकित राजा बृद्ध गणितज्ञ के शब्दों को सुनता रहा।

-कैसी है यह संख्या? बताओ तो.... - सोच में राजा ने पूछा।

- एक महागण्य चौरासी शंख छियालिस पद्म चौहत्तर नील चालिस चरब तिहत्तर घरब सत्तर करोड़ पंचान्च साष इम्पान्च हजार छे सौ पंद्रह, हे राजन।

3.

किंवदंती यही है। सच है या झूठ-पता नहीं, पर गणितज्ञों ने इनाम में मिलने वाले गेहूँ के दानों की संख्या सही बतायी थी। यह घाप धैर्यपूर्वक गणना कर के खुद देख सकते हैं।

। से लेकर 1, 2, 4, 8, आदि संख्याओं को जोड़ना है। 63-वीं बार दुगुना करने पर प्राप्त फल 64-वें घर के लिये दानों की संख्या बतावेगा। पृष्ठ 96 पर सनशापी गयी विधि द्वारा हम घासानी से दानों की प्राथम्यक कुल संख्या ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिये अन्तिम संख्या को दुगुना कर उसमें से इकाई घटा लेना पड़ेगा। अर्थात् परिकल्पन के लिये हमें सिर्फ 64 बार दो को घापस में गुणा करना है:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \text{ आदि (64 बार) .}$$

घासानी के लिये दस-दस दुक्कों के छे समूह बना लें। बचे चार दुक्कों को एक समूह में रख लें। दस दुक्कों का गुणन 1024 होता है (घासानी से गुणा कर सकते हैं) और चार दुक्कों का - 16। अर्थात् इष्ट फल होगा

$$1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16$$

1024 × 1024 गुणा करने पर 1048576 प्राप्त होता है। अतः अब ज्ञात करना है

$$1048576 \times 1048576 \times 1048576 \times 16$$

का गुणनफल।

गुणत संयन्त करके उत्तम से । घटा लेने पर हमें दानों की आवश्यक संख्या मिल जायेगी :

18 446 744 073 709 551 615

यदि इस ईश्वर संख्या की विराटता का अनुमान लगाना चाहते हैं, तो सोचने की कोशिश करें कि नौहों के इतने दानों के लिये कितने बड़े भंडार की आवश्यकता होगी । ज्ञात है कि एक घन मीटर में 150 लाख दाने भावेंगे । अतः मनोरंज के आविष्कारक का इनाम 12 000 000 000 000 घन मीटर या 12000 घन कि० मी० स्थान घेरता है । यदि भंडार की ऊँचाई 4 मीटर हो तथा चौड़ाई 10 मीटर हो, तो उसकी लंबाई 300 000 000 कि० मी० होगी—यह पृथ्वी से सूर्य तक की दूरी की तुलनी है! ...

ऐसा इनाम देना राजा के वश की बात नहीं थी । पर यदि वह गणित बच्छी तरह से जानता, तो कर्ज से छुटकारा प्राप्त कर लेता । इसके लिये सेता को ही एक-एक दाना गिन कर लेने को कहना चाहिये था ।

सचमुच यदि सेता खुद गिनना शुरू करता और रात-दिन बिना रुके गिनता रहता, तो प्रति सेकेंड एक दाने की दर से 24 घंटों में सिर्फ 86 400 दाने गिनता । दस लाख दाने गिनने के लिये उसे दस दिन-रात से कम नहीं लगते । एक घन मीटर नौहों गिनने में छे महीने लग जाते और उसे सिर्फ 5 बिल्ले (भंडार की लंबाई से) मिलते । दस वर्षों तक बिना रुके गिनने पर उसे 100 बिल्ले से अधिक नहीं मिलते । इस प्रकार घाप देखते हैं कि सारी जिंदगी गिनने में बिता देने पर भी उसे मागे गये इनाम का एक श्रुंख ही मिलता ।

64. वृत्त-प्रजनन. पके पोस्त की गाँठ नन्हे दानों से भरी होती है और प्रत्येक से एक पूरा पौधा बन सकता है । कितने पौधे होंगे, यदि हर दाना संकुचित होने का अवसर पाये ? यह जानने के लिये ज्ञात करना चाहिये कि एक गाँठ में कितने दाने हैं । काम नीरस है पर परिणाम इतना मनोरंजक होगा कि यह किया जा सकता है । ज्ञात होता है कि पोस्त की एक गाँठ में 3000 दाने होते हैं ।

इसका मतलब है कि आपके पौधे के घास-पास यदि पर्याप्त जगह

हो तथा जमीन इतनी घबडी हो कि हर दाना एक पीछे में परिणत हो सके, तो घनली गर्मियों में इस स्थान पर 3000 पीछे उग पायेंगे। एक गाँठ में पोस्त का पूरा खेत भिज जाता!

यह देखें कि घाने क्या होगा। 3000 में से हरेक पीछा कम से कम एक गाँठ देगा (बनकर एक से अधिक होते हैं)। प्रत्येक में 3000 दाने मिलेंगे। हर गाँठ के बीच तब 3000 नये पीछे देने और दूसरे वर्ष कम से कम

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ पीछे होंगे}$$

बताना प्रामाण है कि तीसरे वर्ष हमारे एकमात्र पोस्त के वंशजों की संख्या होगी

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000$$

और चौथे वर्ष

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

पाँचवें वर्ष पोस्त के लिये पृथ्वी पर जगह नहीं बचेगी, क्योंकि उसकी संख्या हो जायेगी:

$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000$$

पृथ्वी पर धल (सारे महादेश और द्वीप मिला कर बनी जमीन) का क्षेत्रफल सिर्फ 1350 लाख वर्ग किलोमीटर या 135 000 000 000 000 वर्ग मीटर है। यह पोस्त की संख्या से 2000 गुना कम है।

याप देखते हैं कि यदि पोस्त के सभी दाने पीछे में परिणत हो सकते, तो पाँच वर्षों में ही सारी पृथ्वी का धल पोस्त की पत्ती झाड़ियों (2 हजार पीछे प्रति वर्ग मीटर) से भर जाता। पोस्त के नन्हे से दाने में ऐसी दैत्य-संख्या छिपी है!

यदि पोस्त की बजाय बीज से उगने वाले, पर कम बीज देने वाले किसी दूसरे पीछे के लिये उपरोक्त गणना करें, तो फल यही होगा। यह बात दूसरी है कि उसके वंशज पाँच वर्षों में नहीं, बल्कि कुछ अधिक समय में पृथ्वी को ढक सकेंगे। उदाहरण के लिये डैडेजियम की लेते हैं, जो प्रतिवर्ष लगभग 100 बीज देता है।* यदि सब उग पाते, तो हमें मिलता:

* डैडेजियम की एक गाँठ में 200 बीज भी मिले थे।

1 वर्ष	1 पीछे
2 »	100 »
3 »	10 000 »
4 »	1 000 000 »
5 »	100 000 000 »
6 »	10 000 000 000 »
7 »	1 000 000 000 000 »
8 »	100 000 000 000 000 »
9 »	10 000 000 000 000 000 पीछे

पृथ्वी पर जितना वर्ग मीटर बल है, उससे यह 70 गुना अधिक है।
 अतः नवें वर्ष पृथ्वी के हर वर्ग मीटर में ईटेलियन के 70 पीछे हो जायेंगे।

पर यह भयानक रूप से द्रुत-प्रजनन यथाथ जीवनों में क्यों देखने को नहीं मिलता? क्योंकि बहुत से बीज उगने के पहले ही मृत हो जाते हैं: जमीन अच्छी नहीं होती, या दूसरे पौधों द्वारा दबा दिये जाते हैं, या जीव-जगत उन्हें नाष्ट कर देता है। यदि पौधे और बीज बड़े पैमानों पर नाष्ट नहीं होते, तो कम ही समय में पृथ्वी हर प्रकार के पौधों से छा जाती।

यह बात सिर्फ पौधों के लिये ही नहीं, बल्कि जीवों के लिये भी सत्य है। यदि मृत्यु नहीं होती, तो किसी भी जीव के एक जोड़े से उत्पन्न वंशज सारी पृथ्वी को ढक लेते। विराट स्थलों को बिल्कुल घाच्छादित करने वाले टिट्टी के दल से भाग अनुमान लगा सकते हैं कि यदि मृत्यु जीव-प्रजनन में बाधक नहीं होती, तो क्या होता। किन्हीं एक-दो दशाब्दियों में सारी पृथ्वी करोड़ों जीवों से भर जाती, जो एक दूसरे से स्थान के लिये निरंतर झगड़ते रहते। सागर मछलियों से इस प्रकार भर जाते कि जहाज नहीं चल सकते। हवा नाना प्रकार के कोड़े-मकोड़ों तथा पक्षियों से बिल्कुल अपारदर्शक हो जाती। उदाहरण के लिये, देखें कि सर्वपरिचित घरेलू मक्खी का प्रजनन किस गति से होता है। माना कि हर मक्खी 120 घंटे देती है और एक गर्मी के दौरान उसकी सात पीढ़ियाँ होती हैं, जिसमें आधी मक्खियाँ मादा होती हैं। माना कि पहली बार घंटे 15 अणुल को दिये जाते हैं और

20 दिनों बाद मादा इतनी बड़ी हो जाती है कि खुद छंटे दे सकती है। वह प्रजनन का काल-क्रम इस प्रकार होगा :

15 अप्रैल - एक मादा ने 120 छंटे दिये। मई के आरंभ में 120 मक्खियाँ निकलीं, जिनमें 60 मादा मक्खियाँ थीं ;

5 मई - हर मादा मक्खी [120] छंटे देती है ; मई के मध्य में - $60 \times 120 = 7200$ मक्खियाँ निकलती हैं ; उनमें से 3600 मादा मक्खियाँ हैं ;

25 मई - 3600 में से प्रत्येक मादा मक्खी 120 छंटे देती है ; जून के आरंभ में - $3600 \times 120 = 432000$ मक्खियाँ निकलती हैं, जिनमें 216000 मादा हैं ; 14 जून - 216000 मक्खियों में से प्रत्येक 120 छंटे देती है, जून के अंत में 25920000 मक्खियाँ निकलती हैं, जिनमें से 12960000 मादा हैं ;

5 जुलाई - 12960000 मक्खियों में से प्रत्येक 120 छंटे देती है, जुलाई में - 1555200000 मक्खियाँ निकलती हैं, जिनमें 777600000 मादा हैं ;

25 जुलाई - 9331200000 मक्खियाँ निकलती हैं ; जिनमें 4665600000 मादा हैं ;

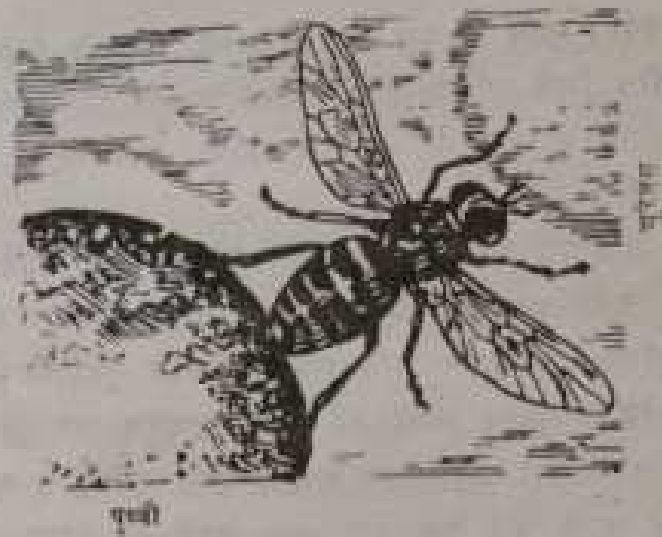
13 अगस्त - 559872000000 मक्खियाँ निकलती हैं, जिनमें 279936000000 मादा हैं ;

1 सितम्बर - 335923200000000 मक्खियाँ निकलती हैं।

निर्वाह प्रजनन के फलस्वरूप एक गर्मी के दौरान उत्पन्न मक्खियों की विराट संख्या को दृश्यात्म्य बनाने के लिये कल्पना करें कि वे पास-पास एक सीधी कतार में बैठी हैं। चूंकि एक मक्खी की लंबाई 5 मि० मी० है, कतार की लंबाई 25000 लाख कि० मी० होगी। यह पृथ्वी से सूरज की दूरी से 18 गुनी अधिक (अर्थात् लगभग पृथ्वी से सुदूर ग्रह यूरेनस की दूरी) है...

घंटा में बागकी अच्छी परिस्थितियों में बाले गये जीवों के इत-प्रजनन को कुछ सस्वी घटनाएँ बताते हैं।

अमेरिका में पहले गौरवे नहीं थे। इतनी साधारण चिड़िया संयुक्त-राज्य में इसलिये लायी गयी थी कि वह हानिकारक कीड़े-मकोड़ों को नाश करे। ज्ञात है कि गौरवे फसल बरबाद करने वाले कीड़ों के मनु



चित्र 54. एक वर्षा के दौरान एक मक्खी की संतति की लटी घरती से युरेनस तक पहुँच सकती है।

है। नयी जगह गौरवों को पसंद आ गयी : वहाँ इन चिड़ियों का शिकार करने वाले जीव नहीं थे। गौरवों की संख्या तेजी से बढ़ने लगी। हानिकारक कीड़े-मकोड़े कम होने लगे। पर जल्द ही गौरवों की संख्या इतनी अधिक हो गयी कि जीव-जगत में उन्हें खाना नहीं मिलने लगा। और तब उनका आक्रमण वनस्पति-जगत पर हो गया। उन्होंने ने खेती बरबाद करना शुरू कर दिया*। अब गौरवों के साथ संघर्ष शुरू हो गया। यह अमेरिकियों के लिये इतना महंगा पड़ा कि भविष्य के लिये एक कानून बनाया गया, जिसके अनुसार अमेरिका में किसी भी पराये जीव-जन्तु को लाने की मनाही हो गयी।

दूसरा उदाहरण। अस्ट्रेलिया में, जब यूरोप निवासियों ने इसकी खोज की, चरमोष्ण नहीं थे। 18-वीं शताब्दी के अंत में वहाँ चरमोष्ण वाले गये। वहाँ भी इनके शिकार करने वाले हिंसक जीव नहीं थे, फलतः उनकी संख्या प्रमाधारण तेजी से बढ़ने लगी। जल्द ही सारे अस्ट्रेलिया में चरमोष्णों की बाढ़ सी आ गयी, जो कृषि के लिये एक

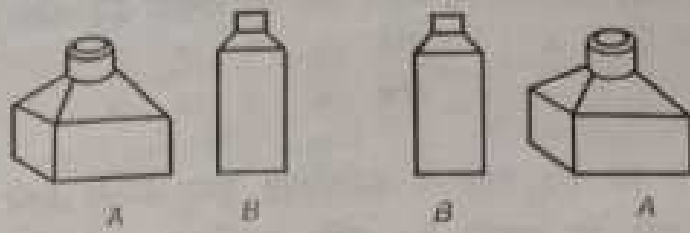
* जीव-समूह पर उन्होंने दूसरी सभी छोटी चिड़ियों को विस्थापित कर दिया।

प्रकोप बन गयी। शक्ति के इस शत्रु से संघर्ष के लिये विशाल राशियां बर्ष की गयीं। सिर्फ सक्षिप कवचों के कारण ही इस प्रकोप का कुछ उपशमन हो सका। खरगोशों के साथ लगभग यही घटना कैलीफोर्निया में भी घटी थी।

तीसरी विनाशप्रद घटना जमैका द्वीप की है। यहाँ विपैले सर्पों का बाहुल्य था। उनसे झुटकारा पाने के लिये उनके भयानक शत्रु सेगिटारियुस सेपेंटेरियुस (घाँसीका की एक सर्प-भक्षी चिड़िया) को लाने का निश्चय किया गया। सर्पों की संख्या सबभूत कम हो गयी, पर मैदानी चूहों की संख्या घसाधारण रूप से बढ़ने लगी। वे गन्ने की खेती आदि बरबाद करने लगे। अब उन्हें नष्ट करने को सोचा जाने लगा। ज्ञात है कि मैदानी चूहों के दुश्मन भारतीय नेवले है। उनके चार जोड़े लाने का निश्चय किया गया। नेवलों ने नयी मातृभूमि को अपना लिया और जल्द ही पूरे द्वीप में फैल गये। दस साल भी नहीं बीते कि वहाँ चूहों की संख्या नहीं के बराबर हो गयी। चूहे नहीं मिलने पर नेवले सर्वाहारी बन गये: फुलों, बकरियों, सुधर आदि के बच्चों तथा घरेलू चिड़ियों पर आक्रमण करने लगे। और भी अधिक संख्या में हो जाने पर वे फलों के बाग, खेतों में फसल और गन्नों पर आक्रमण करने लगे। निवासियों को अपने कभी के मित्रों के साथ अब संघर्ष शुरू करना पड़ा। लेकिन उन्हें कुछ हद तक ही नेवलों द्वारा हानि को रोकने में सफलता मिल सकी।

65. मुक्त का खाना. दस युवकों ने स्कूल समाप्त करने की खुशी में मिलकर रेस्तरा में खाना खाने का निश्चय किया। रेस्तरा में जब सब धाये और खाना टेबुल पर रख दिया गया, उनमें बहस शुरू हो गयी कि टेबुल के चारों ओर कौन कहाँ बैठे। एक कह रहा था कि नामों के वर्णानुक्रम में बैठना चाहिये। दूसरे ने उम्र के अनुसार बैठने की सलाह दी; किसी ने संबाई के अनुसार बैठने को कहा, तो किसी ने उत्तीर्णकों के अनुसार बैठने का प्रस्ताव रखा। बहस लंबी हो रही थी और खाना ठंडा ही रहा था। अंत में बेरे ने यह कह कर सबको शांत किया:

—मेरे युवा मित्रों, अब अपना विवाद बंद करें। आज किसी भी तरह से बैठ लीजिये और मेरी एक बात सुनिये।



चित्र 55. दो वस्तुओं को सिर्फ दो प्रकार से रखा जा सकता है।

जिसे जहाँ जगह मिली, सब बैठ गये। बैरे ने घाने कहा :

-घाप में से कोई एक लिख ले कि आज घाप किस क्रम में बैठे है। घाप कत भी पहाँ खाना खाने घाइये और किसी दूसरे क्रम में बैठिये। परसों फिर किसी तीसरे क्रम से घाइ। जिस दिन घाप पुनः घाब के क्रम में बैठने, मैं प्रतिज्ञा करता हूँ कि उस दिन से हर रोज यहाँ का सबसे स्वादिष्ट खाना घाप सबों को मुफ्त में खिलाया कहूँगा।

प्रस्ताव सब को पसंद आया। निश्चय किया गया कि रेस्तरा में हर दिन घाकर विभिन्न क्रमों से बैठा जाये, ताकि जल्द ही वह दिन घा जाये, जब मुफ्त का खाना मिले।

पर उन्हें इस दिन की प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ी। इसलिये नहीं कि बैरे ने अपनी प्रतिज्ञा पूरी नहीं की, बल्की इसलिये कि टेबुल पर बैठने के विभिन्न क्रमों की संख्या विराट है। यह संख्या है: 3 628 800। दिनों की इतनी बड़ी संख्या का अर्थ है—लगभग 10000 वर्ष!

घापको शायद यह असंभव प्रतीत हो रहा होगा कि सिर्फ दस व्यक्तियों के बैठने के विभिन्न क्रमों की संख्या इतनी बड़ी हो सकती है। परिफलन की जांच घाप खुद कर ले।

सबसे पहले घापको क्रमचयों की संख्या निर्धारित करना सीखना होगा। सरलता के लिये पहले कम से कम तीन वस्तुओं के लिये परिफलन करें। माना कि उनके नाम हैं A, B और C।

हम जानना चाहते हैं कि कितने प्रकार से उनके घापसी स्थानों के देर-फेरी की जा सकती है। निम्न प्रकार से विचार करें। यदि वस्तु C को कुछ देर के लिये अलग हटा दें, तो बाकी दो वस्तुयें सिर्फ दो भिन्न प्रकार से रखी जा सकती हैं। अब इनमें से प्रत्येक स्थिति में उनके साथ वस्तु C रखें। यह तीन प्रकार से किया जा सकता है:

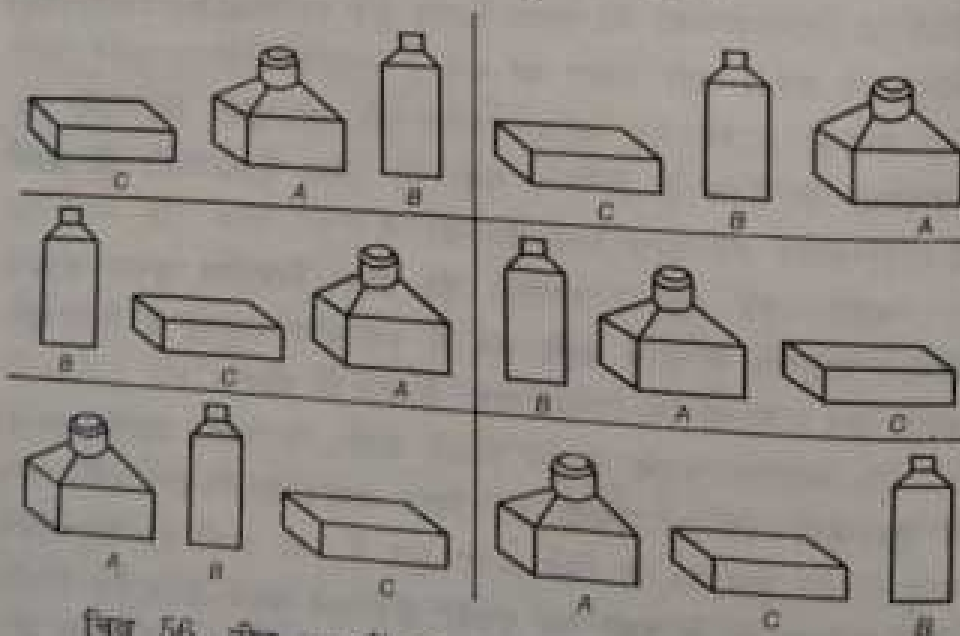
- 1) C को उनके पहले रखा जा सकता है.
- 2) C > > बाद > > >
- 3) C > > बीच > > >

स्पष्ट है कि इन तीन के अतिरिक्त वस्तु C के लिये कोई अन्य जगह नहीं ढूँढी जा सकती है। चूंकि हमारे पास दो वस्तुओं की दो स्थितियाँ (AB और BA) हैं, तो तीनों वस्तुओं का क्रमचय $2 \times 3 = 6$ प्रकार से हो सकता है।

क्रमचय की ये चारों विधियाँ चित्र 56 में दिखायी गयी हैं। अब धाने बँटें - 4 वस्तुओं के लिये गणना करें।

माना कि हमारे पास 4 वस्तुएँ हैं: A, B, C और D। पुनः एक वस्तु, यैने D, को अलग रख दें और बाकी का क्रमचय ज्ञात करें। तीन वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या 6 है। हर क्रमचय में चौथी वस्तु के लिये कितने स्थान संभव हैं? स्पष्ट है कि 4 स्थानों पर रखा जा सकता है:

- 1) D को तीनों वस्तुओं के पहले;
- 2) D को तीनों वस्तुओं के बाद;
- 3) D को पहली तथा दूसरी वस्तुओं के बीच;
- 4) D को दूसरी तथा तीसरी वस्तुओं के बीच।



चित्र 56. तीन वस्तुओं को छः प्रकार से रख सकते हैं।

कुल प्राप्त होते हैं

$$6 \times 4 = 24 \text{ क्रमचय}$$

और चूंकि $6 = 2 \times 3$ और $2 = 1 \times 2$, तो क्रमचयों की कुल संख्या को निम्न गुणन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

इस विचारानुगमन से 5 वस्तुओं का क्रमचय निर्धारित कर सकते हैं:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

6 वस्तुओं के लिये

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720.$$

घब खाना खाने के लिये बैठे 10 व्यक्तियों की ओर वापस लौटें। उनके क्रमचयों की संख्या ज्ञात हो सकती है, यदि हम निम्न गुणन पुरा करने का धम करें:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

गुणन करने पर हमें उपरोक्त संख्या 3628800 प्राप्त होगी।

परिकल्पन अधिक जटिल होता, यदि 10 व्यक्तियों में 5 लड़कियां होतीं और हर लड़की दो युवकों के बीच बैठना पसंद करती। यहां क्रमचयों की संख्या काफी कम है, पर उसका परिकल्पन जटिल है।

माना कि एक युवक 10 में से किसी भी कुर्सी पर बैठ जाता है। अन्य चार युवक लड़कियों के लिये जगह छोड़-छोड़ कर $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ विभिन्न प्रकार से बैठ सकते हैं। चूंकि कुर्सियों की कुल संख्या 10 है, पहला युवक 10 विभिन्न प्रकार से बैठ सकता है; अर्थात् पांचों युवकों के लिये कुल क्रमचयों की संख्या $10 \times 24 = 240$ है। 5 लड़कियां कितने प्रकार से बैठ सकती हैं? स्पष्ट है कि $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ विधियों में। युवकों के लिये 240 क्रमचयों में से प्रत्येक को लड़कियों के लिये 120 क्रमचयों के साथ मिलाया जाये, तो इष्ट क्रमचयों की संख्या होगी

$$240 \times 120 = 28800$$

पिछली संख्या से यह काफी कम है और इतने तर्कों से बैठने के लिये सिर्फ 79 वर्ष लगते। सौ साल तक जीने पर इन लोगों को यदि उस बँदरे से नहीं, तो उम्र के बँधव से मुक्त का खाना मिल जाता।

कमचर्यों की गिनती करना सीख लेने पर हम "15 के खेल" में गोटियों का विभिन्न कमचर्य ज्ञात कर सकते हैं।* अन्य शब्दों में, हम उन सभी प्रश्नों की संख्या ज्ञात कर ले सकते हैं, जो इस खेल के लिये बनाये जा सकते हैं। समझना सरल है कि गुणना का यहाँ अर्थ है—15 वस्तुओं के सभी कमचर्यों को ज्ञात करना। इसके लिये, जैसा कि अब हम जानते हैं, निम्न गुणनफल ज्ञात करना होगा:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 15$$

गुणन करने पर निम्न फल प्राप्त होता है:

$$1\ 307\ 674\ 365\ 000$$

अर्थात् 13 शब्द से अधिक।

इनमें से आधे प्रश्न हलातीत हैं। अर्थात् इस खेल में 6 शब्द से अधिक हलातीत कमचर्य हैं। इससे "15 के खेल" द्वारा मनबहलाव की महामारी का कारण समझा जा सकता है। लोगों को संदेह भी नहीं होता था कि हलातीत प्रश्नों की संख्या इतनी बड़ी हो सकती है।

ज्वात दें कि यदि प्रति सेकेंड गोटियों को नया कमचर्य देना संभव होता तो सभी कमचर्य देखने के लिये दिन-रात अचिराम कार्यरत रहने पर 40000 वर्षों से अधिक व्यतीत करने पड़ते।

कमचर्यों की संख्या के विषय में यह बातचीत हम स्कूली जीवन के इस प्रश्न से समाप्त करेंगे:

कक्षा में 25 छात्र हैं। कितने प्रकार से उन्हें बैठाया जा सकता है?

जो अबतक कही गयी बातें समझ चुके हैं, उनके लिये यह प्रश्न हल करना कठिन नहीं है: बस इन 25 संख्याओं की आपस में गुणा कर देना है:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 23 \times 24 \times 25.$$

* इसमें खाली पर हमेशा दायें निचले कोने में होना चाहिये।

गणित अनेक परिकलनों को सरल करने की विधियाँ बताता है, पर इस प्रकार की क्रियाओं को (जैसे यह गुणन) सरल करने की कोई विधि उस के पास नहीं है।* सिर्फ गुणनखंडों के सांयोनिक खुलनसीच समुहोकरण ही परिकलन-काल को कुछ कम कर सकते हैं। गुणनफल काफी विशाल है। उसमें 26 अंक हैं। इतनी बड़ी संख्या की हम कल्पना भी नहीं कर सकते :

15 511 210 043 330 985 984 000 000.

एव तक मिली सभी संख्याओं में यह निस्संदेह सबसे बड़ी संख्या है और इसे "दैत्य-संख्या" कहलाने का सबसे अधिक अधिकार है। पृथ्वी पर सभी सागरों और नदियों के पानी की छोटी से छोटी बूंदों की कुल संख्या भी इसके सामने कुछ नहीं है।

66. सिक्कों की हेरा-फेरी. मुझे याद है कि बचपन में बड़े भाई ने सिक्कों का एक मनोरंजक खेल दिखाया था। उसने तीन तम्बरियाँ

* वैसे गुणनफल का समीपवर्ती मान अपेक्षाकृत सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। गणित में 1 से लेकर किसी संख्या n तक का गुणनफल प्राप्त करने की आवश्यकता अक्सर पड़ती रहती है। इस प्रकार के गुणन को $n!$ द्वारा व्यक्त करते हैं और इसे क्रमानुगुणित (factorial) n कहते हैं। उदाहरण के लिये, उपरोक्त गुणन को हम संक्षेप में 25 से व्यक्त कर सकते हैं। 18-वीं शताब्दी में अंग्रेज गणितज्ञ स्टर्लिंग ने क्रमानुगुणितों का समीपावर्ती मान निकालने के लिये सूत्र निर्धारित किया था, जिसका रूप निम्न :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

जहाँ $\pi = 3.141\dots$, $e = 2.718\dots$ —ये दो संख्याएँ हैं, जो गणित के विभिन्न प्रश्नों में अत्यंत महत्वपूर्ण भूमिकाएँ निभाती हैं। तालिकाओं या पाठप्रमाणों की सारणी (logarithmic tables) की मदद से स्टर्लिंग के सूत्र द्वारा सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं कि

$$25! \approx 1.55 \cdot 10^{26}$$

काठार में पाच-पास रख दी और किनारे की एक तस्तरी में 5 सिक्कों का एक पिरामिड बना दिया। सबसे नीचे एक खाल का सिक्का था, उसके ऊपर 50 कोपेक का, उसके ऊपर 20 का, उसके ऊपर 15 का और सबसे ऊपर 10 का सिक्का था।

- इन सिक्कों को तीसरी तस्तरी में इसी क्रम में रखना है। यह करते वक़्त तीन नियमों को ध्यान में रखना होगा। पहला नियम: एक बार में सिर्फ़ एक सिक्के को उठा कर रखा जा सकता है। दूसरा नियम: छोटे सिक्के पर बड़ा सिक्का कभी नहीं रखना है। तीसरा नियम: उपरोक्त नियमों का पालन करते हुए सिक्कों को अस्थायी तौर पर बीच की तस्तरी में भी रखा जा सकता है, पर खेल के अंत में सभी सिक्के तीसरी तस्तरी में वापस जाने चाहिये और उनका क्रम आरंभ की भाँति होना चाहिये। नियम तुम देख रहे हो कि कठिन नहीं है। सब काम शुरू कर सकते हो।

मैंने हेरा-फेरी शुरू की। 10-कोपेकी सिक्के को तीसरी तस्तरी में रखा, 15-कोपेकी को बीच की तस्तरी में रखा और घटक गया। 20-कोपेकी को कहाँ रखा जाये? वह 10-कोपेकी और 15-कोपेकी - दोनों से ही बड़ा है।

- इससे क्या हुआ? - भाई ने मदद की। - 10-कोपेकी बीच की तस्तरी में 15-कोपेकी पर रख दो। 20-कोपेकी के लिये तीसरी तस्तरी में जगह बन जायेगी।

मैंने ऐसा ही किया। पर घामे चलकर दूसरी समस्या खड़ी हुई। 50-कोपेकी कहाँ रखा जाये? पर मैं बीघ्र ही भाँप गया; पहले 10-कोपेकी को पहली तस्तरी में रखा, फिर 15-कोपेकी को तीसरी में और इस के बाद 10-कोपेकी को तीसरी में। अब 50-कोपेकी को बीच की खाली तस्तरी में रखा जा सकता था। इस प्रकार हेरा-फेरी के एक लंबे क्रम के बाद मैं पाँचों सिक्कों को तीसरी तस्तरी में पहले की भाँति एक के ऊपर एक रखने में सफल हो गया।

- कुल कितनी हेरा-फेरी करनी पड़ी तुम्हें? - भाई ने मेरे काम की सराहना करते हुए पूछा।

- मैंने गिना नहीं है।

- घापो, गिनते हैं। यह जानना मनोरंजक होगा कि लक्ष्य तक

पहुँचने के लिये चालों (हेरा-फेरी) की न्यूनतम संख्या क्या हो सकती है। यदि पिरामिड में 5 की जगह सिर्फ 2 सिक्के 10-कोपेकी और 15-कोपेकी होते, तो कितनी चालों की आवश्यकता पड़ती?

- तीन की: 10-कोपेकी को बीच की तस्ती में, 15-कोपेकी - तीसरी में और 10-कोपेकी को तीसरी में।

- ठीक है। एक और सिक्का - 20-कोपेकी - लेते हैं और देखते हैं कि तीन सिक्कों को पहली से तीसरी तस्ती तक जाने में कितनी चालों की आवश्यकता पड़ेगी। ऐसा करते हैं: पहले ऊपर के दो छोटे सिक्कों को बीच की तस्ती में लाते हैं। हम जानते हैं कि इसमें 3 चालें लगती हैं। फिर 20-कोपेकी को तीसरी में रखते हैं - 1 चाल। इसके बाद बीच की तस्ती से दोनों सिक्कों को तीसरी में लाते हैं। इसमें पुनः 3 चालें लगती हैं। कुल चालें $3 + 1 + 3 = 7$ हुईं।

- चार सिक्कों के लिये आवश्यक चालों की संख्या मुझे स्वयं गिनने दो। पहले तीन छोटे सिक्कों को बीच की तस्ती में लाता हूँ - 7 चालें होती हैं। फिर 50-कोपेकी को तीसरी खाली तस्ती में रखता हूँ - 1 चाल हुई। और अंत में तीनों छोटे सिक्कों को बीच से उठा कर तीसरी तस्ती में रखते हैं - पुनः 7 चालें मिलती हैं। कुल चालें हुईं: $7 + 1 + 7 = 15$.

- बहुत अच्छे। और पाँच सिक्कों के लिये?

$15 + 1 + 15 = 31$, - मैंने झट उत्तर दिया।

- बस, अब तुम गिनने का आसान तरीका समझ गये हो। पर मैं मुन्हे दिखाता हूँ कि इसे और सरल कैसे किया जा सकता है। ध्यान दो कि जो संख्याएँ हमें मिली हैं, वे दो की दो से एक बार या कई बार गुणा कर के एक घटाने से भी मिल सकती हैं। देखो।

और भाई सारणी बनायी:

$$3 = 2 \times 2 - 1$$

$$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.$$

- मैं समझ रहा हूँ। जितने सिक्के होते हैं, उतनी बार 2 को गुणनखंडों के रूप में लेते हैं और उसमें से इकाई घटा देते हैं। अब



चित्र 57. "पुजारियों को छल्लों की अविराम हेरा-फेरी करनी थी।"

में सिक्कों की किसी भी संख्या के लिये कुल चालों की संख्या बता सकता हूँ। उदाहरणार्थ, 7 सिक्कों के लिये:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

- अब तुम इस प्राचीन खेल को अच्छी तरह से समझ गये हो। सिर्फ एक व्यावहारिक नियम तुम्हें बता दूँ: यदि पिरामिड में सिक्कों की संख्या विषम हो, तो पहले सिक्के को तीसरी तल्लरी में रखते हैं और यदि सिक्कों की संख्या सम हो, तो - बीच की तल्लरी में।

- तुमने कहा कि यह प्राचीन खेल है। क्या इसे तुमने खुद सोच कर नहीं निकाला है?

- नहीं, मैंने सिर्फ इसे सिक्कों के लिये लागू किया है। खेल अत्यंत प्राचीन है और कहते हैं कि इसका जन्म भारत में हुआ था। खेल से संबंधित एक रोचक किंवदंती है। वाराणसी शहर में शायद कोई मंदिर है, जिसमें हिन्दुओं के भगवान ब्रह्मा ने विश्व की सृष्टि करने के बाद हीरे की तीन छड़ियाँ जड़ दी और एक पर उसने सोने के 64 छल्ले चढ़ा दिये: सबसे बड़ा छल्ला सबसे नीचे था और हर छल्ला अपने

निचले से लोटा था। मंदिर के पुजारियों को दिन-रात बिना रुके इन छल्लों को दूसरी छड़ी पर उसी कम से पहनाने का काम सौंपा गया। इसके लिये वे तीसरी छड़ी भी मदद ले सकते थे। उनके इस काम के लिये निर्धारित नियम हमारे खेल के नियमों जैसे ही थे : एक बार में एक ही छल्ला उठा कर पहनाया जा सकता था और छोटे छल्ले पर बड़ा छल्ला नहीं रखा जा सकता था। किंवदन्ती कहती है कि जब यह काम पूरा हो जायेगा, अर्थात् सारे 64 छल्ले जब दूसरी छड़ी पर पहना दिये जायेंगे, तब प्रलय आ जायेगा।

-मोहो, मतलब कि यदि कमा का विश्वास करें, तो दुनिया को कब के खत्म हो जाना चाहिये था।

-तुम शायद सोचते हो कि 64 छल्लों को दूसरी छड़ी पर पहनाने में अधिक समय नहीं लगना चाहिये?

-और नहीं तो क्या! यदि एक सेकेण्ड में एक चाल चले, तो एक घंटे में 3600 चालें चली जा सकती हैं।

-इससे क्या होता है?

-दिन भर में—करीबन एक लाख चालें होंगी। दस दिनों में दस लाख। मुझे विश्वास है कि इतनी चालों में हजार छल्ले भी एक छड़ी से दूसरी पर पहनाये जा सकते हैं।

-तुम मानत हो। 64 छल्ले दूसरी छड़ी पर पहनाने के लिये 5 सत्रह वर्ष चाहिये।

-क्यों घाबिर? चालों की कुल संख्या 64 बार ही तो लिये गये दो का गुणनफल है, और यह होगा...। ठहरो, अभी गुणा कर के बताता हूँ।

-धच्छी बात है। जबतक तुम गुणा करो, मैं अपने काम निपटा पाऊँ।

और भाई मुझे गुणा करने में मजगूल छोड़कर चला गया। मैंने पहले 16 बार दो को आपस में गुणा किया, फिर प्राप्त संख्या को उसी से गुणा कर दिया। प्राप्त संख्या की पुनः स्वयं से गुणा कराया। और अंत में, इस अन्तिम गुणनफल से इकाई घटाना नहीं भूला।

सूची निम्न संख्या प्राप्त हुई:

18-446 744 073 709 551 615 *

मलबध की भाई सही था...

आपके लिये जायद जानना सचिकर होगा कि विश्व की उम्र किन संख्याओं में घांकी जाती है। वैज्ञानिकों के पास इस संबंध में कुछ समीपवर्ती घांकिड़े हैं (सही घांकिड़े प्राप्त करना निस्सन्देह असंभव है):

सूर्य विद्यमान है	5 000 000 000 000 वर्षों से
पृथ्वी	3 000 000 000 >
पृथ्वी पर जीवन	1 000 000 000 >
मनुष्य	कम से कम 500 000 >

67. बाजी. विश्राम-गृह के भोजनालय में खाने के वक्त बात चली कि घटनाओं की संभाव्यता कैसे ज्ञात की जाती है। संयोगवश उनके बीच एक युवा गणितज्ञ भी था। उसने जेब से एक सिक्का निकाला और कहा:

— मैं टेबुल पर बिना देखे सिक्का उछालता हूँ। इसके चित गिरने की क्या संभाव्यता है?

— पहले यह तो समझाइये कि "संभाव्यता" है क्या, आवाजें धायीं।— सब इसे नहीं जानते।



चित्र 58. "सिक्का दो तरह से टेबुल पर गिर सकता है।"

*पाठक इस संख्या से परिचित हैं: यह गतरंज के प्राधिष्कारक के इनाम की धावत करती है।

- वह बहुत सरल है! सिक्का दो तरह से गिर सकता है (चित्र 58) : सिर या पट।

सिक्के के दो स्थितियाँ संभव हैं। जब सिक्का घनुपात निकालते हैं

$$\frac{\text{दृष्ट स्थितियों की संख्या}}{\text{सारी संभव स्थितियों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

घनु (घनुपात) $1/2$ ही सिक्के के पित गिरने की संभाव्यता व्यक्त करता है।

- सिक्के के साथ तो घासान है, - किसी ने बीच में टोका। - कोई जटिल समस्या से, जैसे छक्का।

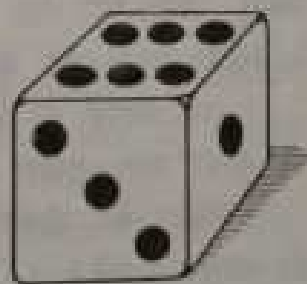
- घाए, देखते हैं, - गणितज्ञ तैयार हो गया। छक्का (चित्र 59) एक घन है, जिसकी फलिकाओं पर 1 से 6 तक की संख्याएँ होती हैं। छक्का उछालने पर कोई विशेष संख्या, जैसे छः, ऊपर आयेगी, इसकी क्या संभाव्यता है? सभी संभव स्थितियों की क्या संख्या है वहाँ? घन अपनी छे फलिकाओं में से किसी पर भी गिर सकता है, अर्थात् कुल 6 स्थितियाँ संभव हैं। इनमें से दृष्ट स्थिति सिर्फ एक है - कि छः आये। इस प्रकार, संभाव्यता 1 में 6 से भाग देने पर प्राप्त हो जायेगी। संक्षेप में कह सकते हैं कि वह घनुपात $1/6$ द्वारा व्यक्त होती है।

- क्या हर बात की संभाव्यता का परिकलन संभव है? - एक महिला ने पूछा। ऐसा उदाहरण से। मैं कहती हूँ: अभी बिड़की से हम जिस पहले गुजरने वाले व्यक्ति को देखेंगे, कोई पुरुष होगा। इस बात की कितनी संभाव्यता है?

- इसकी संभाव्यता संभवतः प्राची है, यदि मान लें कि साल भर का बच्चा भी पुरुषों में गिना जाता है। दुनिया में पुरुषों और स्त्रियों की संख्या बराबर है।

- और इसकी क्या संभाव्यता होगी कि पहले ही गुजरने वालों में से दोनों ही पुरुष होंगे? - किसी और ने पूछा।

- इसका परिकलन कुछ लोगों के लिये थोड़ा जटिल हो सकता है। पहले सभी संभव स्थितियों को देखें। प्रथमतः, संभव है कि



चित्र 59 छक्का।

दोनों ही पुरुष हों। दूसरे, पहले पुरुष गुजरता है, फिर स्त्री गुजरती है। तीसरे, इसके विपरीत, पहले स्त्री गुजरती है, फिर पुरुष गुजरता है। चौर मत में, दोनों ही क्षीर्ये हैं। इस प्रकार, सभी संभव स्थितियों की संख्या 4 हुई। इनमें से इष्ट सिर्फ पहली स्थिति है। अतः इसकी संभाव्यता $\frac{1}{4}$ प्राप्त होगी। यह रहा आपके प्रश्न का उत्तर।

—समझ गया। पर तीन पुरुषों का भी प्रश्न हो सकता है: क्या संभाव्यता है कि प्रथम तीन गुजरने वालों में से तीनों ही पुरुष होंगे?

—इसे भी हल कर लेंगे। इस बार भी शुरू करते हैं सभी संभव स्थितियों की गणना से। दो गुजरने वालों के लिये सभी संभव स्थितियों की संख्या हमने 4 निर्धारित की है। यदि यहाँ तीसरे गुजरने वाले को भी मिला लिया जाये, तो सभी संभव स्थितियों की संख्या दुगुनी हो जायेगी, क्योंकि उपरोक्त चारों स्थितियों के साथ या तो स्त्री होगी या पुरुष होगा (तीसरा व्यक्ति)। अतः सभी संभव स्थितियों की कुल संख्या यहाँ $4 \times 2 = 8$ है। इष्ट स्थिति सिर्फ एक है, अतः इसकी संभाव्यता $\frac{1}{8}$ होगी। यहाँ परिकल्पन का नियम साधारण है: दो गुजरने

वाले लोगों की स्थिति में संभाव्यता $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ थी; तीन की स्थिति में $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; चार की स्थिति में चार घट्टों का गुणनफल, आदि। संभाव्यता, जैसा कि आप देख रहे हैं, पटती ही जा रही है।

—इस गुजरने वाले लोगों की स्थिति में संभाव्यता क्या होगी?

—भार्यात्, इसकी क्या संभाव्यता है कि पहले दस गुजरनेवाले लोगों में से सभी पुरुष होंगे? देखें कि दस घट्टों का आपसी गुणनफल कितना होता है। यह $\frac{1}{1024}$, अर्थात्, सहस्रांश से कुछ कम है। अर्थात्, यदि आप एक रुबल की शर्त लगाते हैं कि यह होगा, तो मैं 1000 रुबल की वाजी लगाने को तैयार हूँ कि यह नहीं होगा।

—शर्त कायदे की है। मैं 1000 रुबल जीतने के लिये एक रुबल की वाजी लगा सकता हूँ।—किसी ने कहा।

—लेकिन मेरे जीतने की संभाव्यता हजार गुनी अधिक है, इसे भी तो ध्यान में रखें।

—कोई फर्क नहीं पड़ता। एक हजार जीतने के लिये एक रुबल का

खतरा इस बात के लिये भी मौज ले सकता है कि पहले गुजरने वाले इस बाघ लोगों में सभी पुरुष हैं।

-और आप कल्पना कर सकते हैं कि इस घटना की संभाव्यता कितनी कम है?— गणितज्ञने पूछा।

-कोई करोड़वाँ भाग होगा और क्या।

-इसमें भी बहुत कम! करोड़वाँ भाग तो करीब 20 गुजरने वालों के लिये होगा। सौ गुजरने वालों के लिये... अभी बताता हूँ, जरा कागज-पेन्सिल दे लो। एक अरब... खरब... बीस... महा-शंख... ओहो! एक पर तीस शून्य!

-बस, इतना ही?

-एक पर तीस शून्य कम लग रहे हैं क्या? इतनी तो सागर में बूँदें भी नहीं होंगी।

-संख्या बड़ी है, इसमें कोई शक नहीं! कितना आप दाँव पर रखने के लिये तैयार हैं मेरे एक रुबल की धरत के लिये?

-हा.. हा! सब कुछ! सब कुछ, जो मेरे पास है।

-सब कुछ तो बहुत ही सया। आप अपनी सायकिल ही रख दीजिये। ठरते हैं?

-बिल्कुल नहीं। आप चाहते हैं, तो सायकिल ही सही। मैं कोई खतरा मौल नहीं ले रहा हूँ।

-मैं भी कोई खतरा मौल नहीं ले रहा हूँ। एक रुबल की ही तो बात है। पर पूरी सायकिल जीतने की उम्मीद है। आप जीतने तो आपको लगभग कुछ भी नहीं मिलेगा।

-पर आप बात तो समझिये। आप जहर हारेंगे। सायकिल आपके हाथ कभी नहीं आवेगी और आपका रुबल समझ लीजिये कि मेरी जेब में था क्या है।

-आप कर क्या रहे हैं?— गणितज्ञ के मित्र ने रोकने की कोशिश की।—एक रुबल के लिये अपनी सायकिल खतरे में डाल रहे हैं। यह पागलपन है।

-उल्टा, -गणितज्ञ ने उत्तर दिया, -ऐसी स्थिति में एक रुबल की भी धरत लगाना पागलपन है। हार अक्षय्यभात्री है! यह रुबल को पीछा पानी में फेंकने के बराबर होगा।

-पर कम से कम एक संयोग की तो धारणा की जा सकती है?
-आपका यह संयोग मानस में एक बूट के बराबर भी नहीं है।
और मेरे पास में इस मानस है। मेरी जीत दो-दूने-चार की भांति स्पष्ट है।

-मानस में मत बहिये, -यह शक्त आभास बूट की थी, जो अब तक चुपचाप बंटा बहस गुन रहा था। -आप गलत है।
-कैसे? प्रोफेसर साहब, क्या आप भी साधारण लोगों की तरह सोच रहे हैं?

-आप ने यह तो सोचा ही नहीं कि यहाँ सभी स्थितियाँ समान मूल्य नहीं रखती। संभाव्यता की गणना किसी स्थितियों के लिये की जाती है? जिनकी संभाव्यता समान हो। और दो गयी परिस्थितियों में... खैर छोड़िये, - प्रोफेसर ने ध्यान से कुछ सुनते हुए कहा, - वास्तविकता सभी स्वयं आपकी गनती बता देगी। समता है कि बुद्ध-समीत का वादन हो रहा है, है न?

-बुद्ध-समीत से इसका क्या संबंध है?...-पुका गणितज्ञ कहते ही ही वाला था, पर चुप रह गया। उसका चेहरा भयभीत हो उठा। वह अपनी जगह से उछल कर खिड़की के पास गया और बाहर झाँकने लगा।

-आप सही हैं। -उसका उदास स्वर सुनायी दिया। -बाकी द्वार चुका हूँ! विदा, मेरी सामकिल...

मिनट भर बाद सब समझ गये कि बात क्या है। खिड़की के सामने से सैनिकों का एक बटालियन गुजर रहा था।

68. दैत्य-संख्यायें - हमारे भीतर और बाहर. दैत्य-संख्याओं का दर्शन करने के लिये किसी स्थिति-विशेष की खोज आवश्यक नहीं है। वे हमारे इर्द-गिर्द और यहाँ तक कि हमारे भीतर भी, हर जगह, विराजमान हैं। सिर्फ हमें देखना प्राना चाहिये। आकाश, जिसके नीचे हम जी रहे हैं; रेत, जिसपर हम चलते हैं; वायु, जिसमें हम साँस ले रहे हैं और रक्त, जो हमारी धमनियों में बहता है - ये सब दैत्य-संख्याओं को अपने भीतर अदृश्य छिपा कर रखते हैं। अंतरिक्ष में छिपी दैत्य-संख्यायें अधिकांश लोगों के लिये कोई नहीं बात नहीं है। चाहे आप तारों की संख्या की बात करें या उनकी दूरियों की, उनके आकार

की, जवन की या उनकी उम्र की, — हर हालत में अपनी विराटता में आपकी कल्पना-शक्ति कुंठ करने का सामर्थ्य रखने वाली संख्याएँ इष्टिमोचर होंगी। "घंतिरिखी संख्या" — इसी में इसे वृ ही मुहावरे की तरह नहीं प्रयुक्त किया जाता। पर बहुत से लोग यह नहीं जानते कि जित आकाश-पिंडों की खगोलशास्त्री "सधु" की संज्ञा देते हैं, वे भी हमारी पार्थिव इकाइयों की तुलना में विशाल ही हैं। हमारे मीर-मंडल में ही कुछ ग्रह हैं, जिन्हें खगोलविद् उनके छोटे आकार के कारण "नन्हा" कहते हैं। उनमें ऐसे भी हैं, जिनके व्यास कुछ किलोमीटरों में मापे जाते हैं। बड़े विशाल पैमानों के आदी होने के कारण खगोलविद् उमेधा से उन्हें "नन्हा" कह कर पुकारते हैं। पर वे सिर्फ अन्य आकाश-पिंडों की तुलना में नन्हे हैं। मानवीय माप-दंडों की तुलना में वे बिल्कुल नन्हे नहीं हैं। उदाहरण के लिये एक "नन्हे" ग्रह को लें, जिसका व्यास 3 कि० मी० है। रेखागणित के नियमों द्वारा हम ज्ञात कर सकते हैं कि इसकी सतह का क्षेत्रफल 28 वर्ग कि० मी०, या 28000000 वर्ग मी० होगा। एक वर्ग मीटर जमीन पर 7 घादमी खड़े हो सकते हैं। अतः 280 लाख वर्ग मीटर की सतह पर 1960 लाख व्यक्तिगों को जगह मिल जायेगी।

रेत भी, जिसपर हम चलते हैं, हमें दैत्य-संख्याओं के देश की शैर कर सकता है। "रेत-कणों की तरह असंख्य" या "बालूका-राशि" मुहावरे भी निराधार नहीं हैं और वे आपकी प्राचीन मुहावरे हैं। फिर भी प्राचीन काल के लोगों ने रेत-कणों की संख्या की तारों की संख्या के बराबर मान कर उसकी विराटता का अवमूल्यन ही किया है। बुराने जमाने में दूरदर्शक नहीं थे और तंगी आँखों से सिर्फ 3500 के लगभग तारे (आकाश के एक गोलाई में) दिखते हैं। समुद्र-तटों पर बालू-कणों की संख्या इससे कहीं आरखों गुनी अधिक है।

गहरी मापने में दैत्य-संख्याएँ हवा में छिपी हैं, जिसमें हम साँस लेते हैं। हवा के प्रत्येक घन से० मी० में 27 अंश (घर्पात् 27 पर 18 गुण्य) नन्हे कण हैं, जिन्हें धणु कहते हैं।

आप कल्पना नहीं कर सकते कि यह कितनी बड़ी संख्या है। यदि दुनिया में इतने लोग होते, तो उनके लिये हमारे ग्रह पर जगह नहीं होती। मरुदेशों, सागरों आदि सबको मिला कर पृथ्वी-तल का क्षेत्रफल

5000 लाख वर्ग कि० मी० है। इसे वर्ग मीटर में परिणत करें तो प्राप्त होगा-

500 000 000 000 000 वर्ग मीटर।

इसमें 27 ग्रंथ में भाग देने पर प्राप्त होता है 54000। अर्थात् पृथ्वी-तल के प्रति वर्ग मीटर पर 50000 से भी अधिक व्यक्ति होते!

यह कहा जा चुका है कि रैल्प-संख्यायें मानव-शरीर में भी छिपी हैं। यह हम रक्त के उदाहरण से



चित्र 60

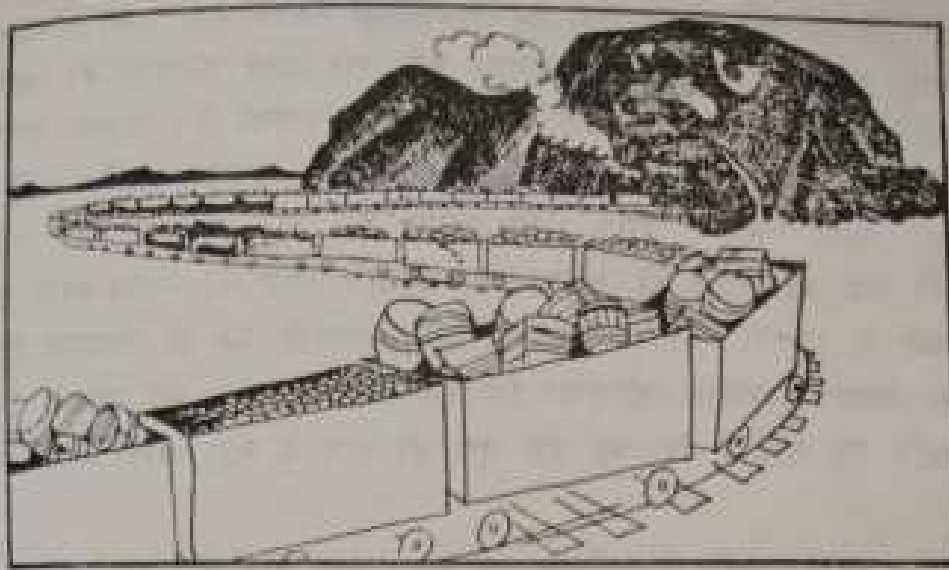
दिखाते हैं। यदि उसकी एक बृहद्-भूषमदर्शक की सहायता से देखें, तो उसमें असंख्य घट्टत छोटे लाल रंग के कण दिखेंगे। ये ही वे कण हैं, जिनके कारण रक्त लाल दिखता है। इस प्रकार का हर "लाल रक्त-कण" बीच में दूरे हुए "गोल तकिये" के आकार का होता है (चित्र 60)। उसका व्यास लगभग 0.007 मि० मी० होता है और उसकी मुटाई— 0.002 मि० मी० होती है। पर उनकी संख्या विराट होती है। एक घन मि० मी० रक्त में उनकी संख्या 50 लाख होती है। पूरे शरीर में उनकी संख्या कितनी है? किलोघामों में मनुष्य के वजन से 14 गुना कम लीटर उसका रक्त होता है। यदि आप का वजन 40 कि० घा० है, तो आपके शरीर में लगभग 3 लीटर, अर्थात् 3 000 000 घन मि० मी० रक्त है। चूंकि हर घन मि० मी० में लाल रक्त कणों की संख्या 50 लाख है, पूरे शरीर में उनकी संख्या होगी:

$$5\ 000\ 000 \times 3\ 000\ 000 = 15\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

15 खरब रक्त कण! यदि इन लम्हे कणों को एक कतार में रखा जाये, तो उसकी लंबाई 105 000 कि० मी० होगी। इतने लम्बे धागे से पृथ्वी को भूमध्य-रेखा पर से

$$1\ 000\ 000 : 40\ 000 = 25 \text{ बार}$$

लपेटा जा सकता है। किसी वयस्क व्यक्ति के शरीर के लाल रक्त-कणों से बने धागे से पृथ्वी 3 बार लपेटा जा सकती है।



चित्र 6। मनुष्य अपने जीवन काल में इतना खाता है।

अब हम समझा देने हैं कि हमारे शरीर के लिये इन कणों के इतने छोटे होने का क्या महत्व है। इनका कार्य है—पूरे शरीर के विभिन्न भागों में अम्लजन (आक्सीजन) फैलाना। जब रक्त फेफड़ों से हो कर निकलता है, तब रक्त-कण आक्सीजन अपने साथ ले लेते हैं और फिर रक्त के साथ बहते हुए फेफड़े से दूरस्थ तन्तुओं को दे देते हैं। इतना छोटा होने के कारण ही वे इस कार्य को करने में समर्थ हैं। वे जितने छोटे होंगे और जितनी अधिक संख्या में होंगे, उतना ही अधिक उनके वाह्य सतह का कुल क्षेत्रफल होगा और उतना ही अधिक आक्सीजन अपने साथ ले सकेंगे, क्योंकि अपनी सतह के माध्यम से ही वे आक्सीजन सोखते और निकालते हैं। परिकल्पना दिखाते हैं कि उनकी सतह का कुल क्षेत्रफल (1200 वर्ग मी०) मानव-शरीर की सतह के क्षेत्रफल से कई हजार गुना अधिक है। ऐसा क्षेत्रफल 40 मीटर लंबी व 30 मीटर चौड़ी जमीन की टुकड़ी का होता है। अब आप समझ सकते हैं कि रक्त कणों का बन्हा होना तथा बिराट संख्या में होना शरीर के लिये कितना बड़ा महत्व रखता है; इन्हीं दो कारणों से वे हमारे शरीर की कुल सतह से हजार गुनी बड़ी सतह द्वारा आक्सीजन को "कैद" तथा "मुक्त" कर पाते हैं।

70 वर्ष की सीमात वय में एक घादमी जितने प्रकार का जितना खाना खाता है, इसकी यदि गणना करें, तो प्राप्त परिणाम को नहीं मानने में ईश्वर-संख्या के नाम से पुकारा जा सकता है। मनुष्य अपने जीवन-काल में जितने टन पानी, रोटी, मांस, मछली, घण्टे, ची, दूध, चर्बी, मक्खियां आदि हजम करता है, उन्हें बोसे के लिये एक पुरी सबो मात्रमाही की आवश्यकता पड़ेगी। चित्र 6। मानव-शरीर के वजन से हजारों गुनी अधिक की भोजन-सामग्री को ही दिखाता है। इसे देखकर विश्वास नहीं होता कि एक घादमी इतना खा सकता है, यद्यपि यह सच है कि वह इसे एक ही बार में नहीं खाता।

अध्याय 8

बिना स्केल के

69. कदमों में राह नापें. गज या नापने का फीता हमेशा पास नहीं होता, अतः बिना उनकी मदद के ही कम से कम समीपवर्ती नाप देने के लिये कुछ विधियों की जानकारी होनी चाहिये।

सभी दूरियों को कदमों में नापना सबसे सरल है। निस्संदेह, वे समान लंबाइयों के नहीं होते: हमारे कदम छोटे-बड़े भी हो सकते हैं। फिर भी साधारण चाल से चलने पर कदमों की लंबाइयां लगभग समान होती हैं। यदि उनकी औसत लंबाई ज्ञात हो, तो बिना किसी वृष्टि के दूरियों को कदमों में नापा जा सकता है।

अपने कदमों की औसत लंबाई जानने के लिये पहले बहुत से कदमों की कुल लंबाई ज्ञात करते हैं और फिर एक कदम की औसत लंबाई का परिकलन करते हैं। इसके लिये नापने के फीते चर्चर काम नहीं चलेगा।

समतल भूमि पर फीते की मदद से लगभग 20 मीटर की दूरी नाप लें। जमीन पर फीते का निशान डाल कर फीता हटा लें। अब निशान की रेखा पर साधारण कदमों से चलें। हो सकता है कि इस लंबाई में धापको कदमों की पूर्ण संख्या नहीं मिले। इस स्थिति में यदि पान्चिरी कदम साधारण कदम के आधे से छोटा हो, तो उसे छोड़ दें, और यदि आधे से बड़ा हो, तो उसे एक के बराबर मान लें। 20 मीटर की दूरी में कदमों की कुल संख्या से भाग देने पर एक कदम की औसत लंबाई निकल आएगी। यह लंबाई याद रख लेनी चाहिये, ताकि अकस्मत् पड़ने पर धाप किसी दूरी को नाप सकें।

दूरियाँ नापने के लिये कदमों को गिनते वक्त गिनती से चले नहीं जा गिनती भ्रम न जायें— इसके लिये निम्न विधि का उपयोग करते हैं। कदमों सिर्फ 10 तक गिनते हैं और बायें हाथ की एक उंगली मोड़ लेते हैं। जब बायें हाथ की सारी उंगलियाँ मुड़ चुकी होती हैं, अर्थात् घाय 50 कदम चल चुके होते हैं, दायें हाथ की एक उंगली मोड़ लेते हैं। दायें हाथ की मुड़ी उंगलियाँ बताती हैं कि घाय कितनी बार 50 कदम चल चुके हैं। इस तरह 250 तक गिना जा सकता है। इस के बाद फिर से शुरू करते हैं। यह याद रखना पड़ता है कि दायें हाथ की सारी उंगलियाँ कितनी बार मुड़ चुकी हैं। उदाहरण के लिये, यदि कोई दूरी तय करने में घाय बायें हाथ की सारी उंगलियाँ दो बार मोड़ चुके हैं और अंत में दायें हाथ की तीन उंगलियाँ तथा बायें हाथ की चार उंगलियाँ मुड़ी हों, तो उक्त दूरी में कदमों की संख्या होगी:

$$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690$$

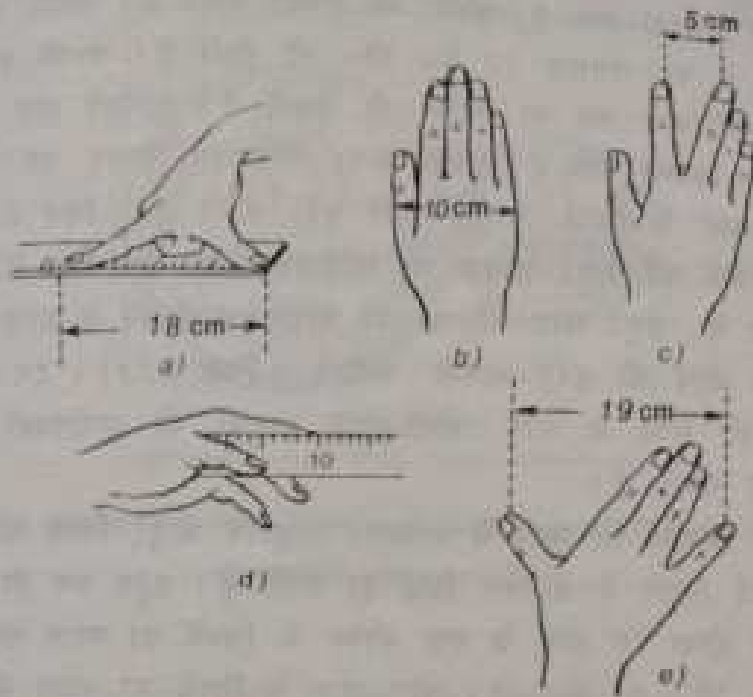
इसमें कुछ वे कदम भी जोड़ देने चाहिये, जो घाय बायें हाथ की चौथी उंगली मोड़ने के बाद चले हैं।

इस मिलजुलने में घायको एक पुराने नियम की याद दिला दें: यमसक घादमी के औसत कदम की लंबाई तलुबों से धाँधों तक की लम्बाई की आधी होती है।

चलने की गति से संबंधित एक दूसरा प्राचीन व्यावहारिक नियम है: घादमी एक घंटे में कुल उतने किलोमीटर चलता है, जितने कदम वह तीन सेकेंड में तय करता है। सरलतापूर्वक दिखाया जा सकता है कि यह नियम सिर्फ विशेष कदमों के लिये ही सही है। माना कि कदम की लंबाई x मी० है और तीन सेकेंड में कदमों की संख्या ठीक n है। तब पैदल-यात्री 3 सेकेंडों में nx मी० दूरी तय करता है। इस प्रकार एक घंटे (3600 सेकेंड) में वह $1200nx$ मी० या $1.2nx$ कि० मी० की दूरी तय करता है। यह दूरी 3 सेकेंड में चले गये कदमों की संख्या के बराबर ही, इसके लिये आवश्यक है कि निम्न समीकरण सही हो:

$$1.2nx = n \text{ या } 1.2x = 1$$

जहाँ से $x = 0.83$ मी०।



चित्र 62. पहले ये लंबाईयाँ हाथ पर नाप लें, ताकि फिर नापने के फीते बिना काम चला सकें।

यदि इसके पहले का नियम (कि कदम की लंबाई आदमी की लंबाई पर निर्भर करती है!) हमेशा सही है, तो दूसरा नियम सिर्फ साधारण कद के (लगभग 175 से० मी० ऊँचे) लोगों के लिये ही सही है।

70. सजीव मान-बंद. मध्यम आकार की वस्तुओं की लंबाई बिना किसी उपकरण के निम्न प्रकार से नापते हैं। कोई रस्सी या छड़ी एक कंधे से दूसरे फीते हुए हाथ की उंगलियों तक तान लेते हैं। यथस्क आदमी के लिये यह लंबाई लगभग 1 मीटर की होती है। एक मीटर की लंबाई नापने का एक और तरीका यह है कि सरल रेखा पर छः बिन्दु, पर्याप्त अधिकतम फैलाव पर स्थित घंगूठे और तबनी के बीच की दूरी की छः गुनी लंबाई, नाप लें। यह लगभग एक मीटर होगी।

अचिरो विधि "खाली हाथ" नापने की कला बताती है। इसके लिये हाथ संबंधी कुछ लंबाईयाँ पहले से नाप कर याद कर लेते हैं। क्या-क्या नापें लेनी पड़ती है? सबसे पहले तो, जैसा कि चित्र

62.b में दिखाया गया है, हथेली की चौड़ाई नापते हैं। धरस्क घावमी के हाथ में यह लगभग 10 से० मी० की होती है। आपके हाथ में यह लंबाई कुछ कम या ज्यादा हो सकती है। आपको याद रखना होगा कि कितना फर्क है। इसके बाद, अधिकतम फैलाव पर तर्जनी और मध्यमा के सिरो के बीच की दूरी नापते हैं (चित्र 62.c)। अपनी तर्जनी की लंबाई जानना भी लाभदायक होता है (चित्र 62.d)। धीरे धीरे में, घंगूठे और कनिष्ठा को अधिकतम फैलाने से प्राप्त उनके सिरो के बीच की दूरी जाननी चाहिये (चित्र 62.e)। इन सभी पैमानों की मदद से आप छोटी-मोटी वस्तुओं की समीपवर्ती मापें ज्ञात कर सकते हैं।

71. सिक्कों की मदद से नापना. प्राथमिक धातुई सिक्के भी चीजों की लंबाई नापने में सहायक सिद्ध हो सकते हैं। बहुत कम ही लोगों को ज्ञात होगा कि तांबे के एक कोपेक के सिक्के का व्यास सही-सही $1\frac{1}{2}$ से० मी० का होता है। धीरे पांच के सिक्के का व्यास होता है $2\frac{1}{2}$ से० मी०। यदि इन दोनों को पास-पास रखा जाये, तो 4 से० मी० (चित्र 63) की दूरी नापी जा सकती है। अतः यदि आपके पास कुछ सिक्के हैं, तो आप निम्न लंबाइयों की बिल्कुल सही नाप ले सकते हैं:

कोपेक	$1\frac{1}{2}$ से० मी०
5-कोपेकी सिक्का	$2\frac{1}{2}$ » »
दो 1-कोपेकी सिक्के	3 » »
5-कोपेकी धीरे 1-कोपेकी	4 » »
दो 5-कोपेकी	5 » »

आदि।

5-कोपेकी की चौड़ाई में से 1-कोपेकी की चौड़ाई घटा लेने पर ठीक 1 से० मी० की लंबाई बनेगी।

यदि आपके पास 5-कोपेकी या 1-कोपेकी न हों, तो 2-कोपेकी धीरे 3-कोपेकी से भी काम चल सकता है, यदि आप ठीक-ठीक याद कर लें कि इन दोनों सिक्कों की चौड़ाइयाँ मिल कर 4 से० मी० के तुल्य होती हैं (चित्र 64)। इस प्रकार आप 4 से० मी० लंबा कामज



चित्र 63. कोपेक और पाँच कोपेकी को सटा कर रखने से 4 से. मी. की लम्बाई नाप सकते हैं।

का टुकड़ा प्राप्त कर सकते हैं और फिर यदि उसे बीच से मोड़ कर एक बार फिर से मोड़ दें, तो एक-एक सेंटीमीटर से चिह्नित चार से० मी० का माप-दंड मिल जायेगा।

साप देखते हैं कि खोजने और थोड़ी माथा-पच्ची करने पर साप तेल के बिना भी लंबाइयों की काम-चलाऊ माप ज्ञात कर सकते हैं।



चित्र 64. तीन कोपेकी और दो कोपेकी की चौड़ाइयाँ मिल कर 4 से. मी. के बराबर होती है।

इन जानकारीयों में यह भी जोड़ लेना लाभदायक होगा कि राई के सिक्कों का वजन तोलने की इकाइयों के रूप में भी इस्तेमाल किया जा सकता है। राई के नये सिक्के, जो धिसे-पिटे नहीं हैं, उतने ही ग्राम भारी होते हैं, जितने उनमें कोपेक होते हैं—। कोपेकी में 1 ग्राम, दो-कोपेकी में 2 ग्राम, आदि। धिसे सिक्के इन मानकों से बहुत कम ही भिन्न होते हैं। चूंकि किसी छोटी-मोटी चीज का वजन लेते वक्त प्रक्सर 1—10 ग्राम तक के बाद उपलब्ध नहीं होते, तो ये जानकारीयों काफी सहायक सिद्ध हो सकती हैं।



अध्याय 9

ज्यामिति की पहेलियाँ

इस अध्याय में एकत्रित पहेलियों के हल के लिये ज्यामिति की पूर्ण जानकारी आवश्यक नहीं है। इनका हल वे भी कर सकते हैं, जिनमें सिर्फ प्रारम्भिक ज्यामिति का साधारण भर ज्ञान है। यहाँ दी गयी दो दर्जन पहेलियाँ पाठक को यह दिखाने में सहायक होंगी कि वह रेखागणित के उम ज्ञान को कहीं तक आत्मसात कर पाया है, जिसे जानने का वह दावा करता है। ज्यामिति के वास्तविक ज्ञान का अर्थ सिर्फ ज्यामितिक आकृतियों के गुण-धर्म को गिनाना नहीं होता, बल्कि वास्तविक व व्यावहारिक समस्याओं को हल करना भी होता है। हाथ में बंदूक रखने से क्या फायदा है, यदि आप उसे चलाना नहीं जानते।

पाठक बृद्ध निर्धारित करे कि वह ज्यामिति रूपी लक्ष्य पर इन 24 गोलियों में से कितने सही निशाने लगा पाता है।

72. छोड़ा-गाड़ी. पिछले अक्ष की अपेक्षा आगे का अक्ष क्यों जल्द पिस्ता है और अक्षर जल उठता है?

73. विशालक शीश में. चौगुना वर्धन देने वाले कोण से $1\frac{1}{2}^\circ$ का कोण देखा जाता है। कोण (चित्र 66) कितना बड़ा दिखेगा?

74. स्पिर्ट-लेवेल. मिस्त्रियों के हाथ आपने नैस के बुलबुले वाला स्पिर्ट-लेवेल देखा होगा। जब स्पिर्ट-लेवेल अधीतव तल पर रखा जाता है, तब वह बुलबुला निशान से ऊपर खिसक आता है। बुलबुले की गति का कारण यह है कि वह द्रव से हल्का होता है, अतः सदा ऊपर उठने की प्रवृत्ति रखता है। यदि लेवेल की नली सीधी होती, तो तल का समथ सूकाप भी बुलबुले की नली में दूर दूसरे सिरे पर भेज

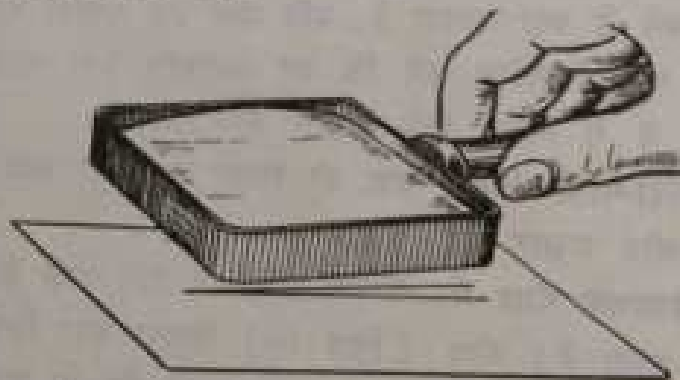


चित्र 65. पिछली धुरी को धरोखा घगनी धुरी जल्द क्यों घिसती है।

देता। ऐसे स्पिर्ट-सेबेल को व्यवहार में लाना काफी अनुविधाजलक है।
 घट: नली को चित्र-67 की भाँति एक हल्का मोड़ दे दिया जाता है।
 पूर्ण क्षैतिज अवस्था में बुलबुना नली के ऊच्चतम बिंदु पर होता है,
 जो नली के मध्य होती है। यदि तल झुका हुआ है, तो बुलबुना मध्य
 के पास की किसी बिंदु पर चला जाता है।

प्रश्न है: यदि तल का झुकाव आधी डिग्री हो, तो निर्धारित करें
 कि बुलबुना मध्य-बिंदु के निम्नान से कितना दूर घिसकेगा? नली की
 वक्रता की विग्ना। मीटर है।

75. फलकों की संख्या. यह प्रश्न बर्लक बहुतों को बहुत टेड़ा
 लगेगा या, इसके विपरीत, बहुतों को बेबनुफाना लगेगा: घट-फलकीय
 पेशिल में कितने फलक होंगे?



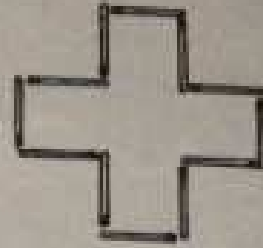
चित्र 66. कितना बड़ा कोण दिखेगा?



चित्र 67. स्पिर्ट सेबेल।



चित्र 68. चन्द्र-हस्तिपा ।



चित्र 69. तीलियों की सजीब ।

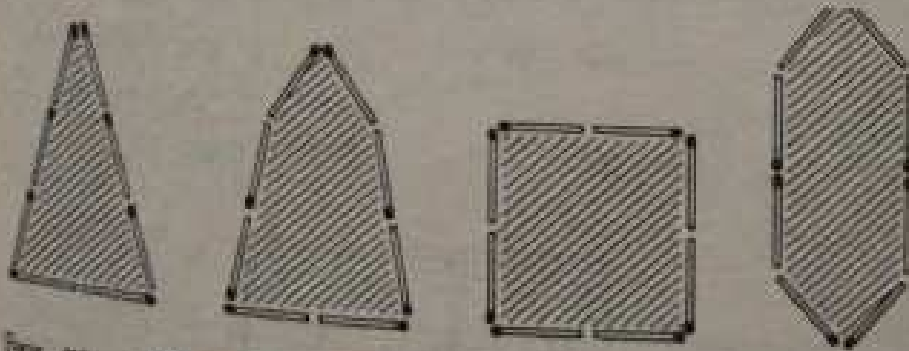
उत्तर देखने से पहले ध्यानपूर्वक सोच लें ।

76. घड़चंद्र. चित्र-68 में दिखाये गये घड़चंद्र को 6 भागों में बाटना है। इसके लिये आप सिर्फ दो सरल रेखाएँ खींच सकते हैं। कैसे करेंगे ?

77. 12 तीलियों से. 12 तीलियों से एक कौस का चिह्न (चित्र 69) बन सकता है, जिसका कुल क्षेत्रफल 5 'वर्ग-तीली' के बराबर है। तीलियों के स्थान बदल कर ऐसी आकृति बनायें, जिसका क्षेत्रफल सिर्फ 4 'वर्ग-तीली' हो।

इसके लिये नापने के यंत्रों का प्रयोग निषेध है।

78. 8 तीलियों से. 8 तीलियों से अनेक प्रकार की बंद आकृतियाँ बनायी जा सकती हैं। इनमें से कुछ चित्र 70 में दिखायी गयी हैं।



चित्र 70. तीलियों से अधिकतम क्षेत्रफल वाली आकृति कैसे प्राप्त कर सकते हैं ?

उनके क्षेत्रफल बराबर हिन। प्रश्न: 8
 तीनों द्वारा अधिकतम क्षेत्रफल की कोई
 भांति बनायें।



चित्र 71. मक्खी की
 शहद की बूंद तक
 पहुँचने के लिये सबसे
 छोटा रास्ता बतायें।

79. मक्खी का पथ. शीशे के बेलना-
 कार बरतन की भीतरी दीवार पर उपरी
 किनारी से 3 से० मी० नीचे शहद की एक
 बूंद चिख रही है। बरतन की बाहरी दीवार
 पर शहद के डीक सामने की बिंदु पर एक
 मक्खी बैठी है (चित्र 71)

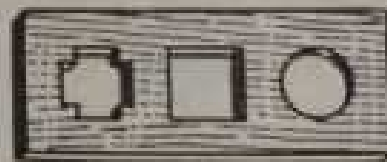
मक्खी के लिये सब से छोटा पथ
 बतायें, जिसपर मक्खी शहद तक पहुँच सके।
 बरतन की ऊँचाई 20 से० मी० तथा
 व्यास 10 से० मी० है।

यह मत उम्मीद कीजिये कि मक्खी न्यूनतम पथ खुद ढूँढ लेगी
 और घापकी समस्या सरल कर देगी: इसके लिये उसे रेखागणित का
 ज्ञान होता चाहिये, जो मक्खी के सर के लिये काफी बड़ा है।

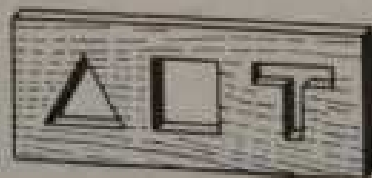
80. डाट को खोज. घापके सामने एक तख्त (चित्र-72) है,



चित्र 72. इन तीन छेदों
 को बंद कर सकने वाली
 एक डाट बनायें।



चित्र 73. इन छेदों को बंद
 करने वाली कोई एक डाट हो
 सकती है?



चित्र 74. इन तीन छेदों को बंद करने वाली एक डाट बन सकती है?

जिसमें तीन छेद हैं: वर्गाकार, त्रिकोण और गोल। क्या ऐसी कोई डाट हो सकती है, जो इन तीनों ही प्रकार के छेदों को बंद कर सके।

81. दूसरी डाट. यदि आप पिछला प्रश्न हल कर चुके हैं, तो होसकता है कि आपको चित्र-73 में दिखाये त्र्युज के छेदों को बंद करने के लिये भी एक डाट मिल जाये।

82. तीसरी डाट. अंत में एक और इसी प्रकार का प्रश्न: चित्र-74 में दिखाये त्र्युज के छेदों के लिये क्या कोई एक डाट है?

83. 5 कोपेक पार करना. एक 5 कोपेक का और एक 2 कोपेक का सिक्का लें। एक कागज पर ठीक दो कोपेकी सिक्के के बराबर छेद बना लें।

क्या खयाल है आपका, पाँच का सिक्का इस छेद से होकर निकल पायेगा!

इसमें कोई चाल नहीं है: हल का संबंध सचमूच रेखगणित के साथ है।

84. मीनार की ऊंचाई. आपके शहर में एक दर्शनीय मीनार है, जिसकी ऊंचाई आप नहीं जानते। पोस्टकार्ड पर छपा मीनार का एक फोटो आपके हाथ में है। यह फोटो मिनार की ऊंचाई निर्धारित करने में कैसे मदद कर सकता है?

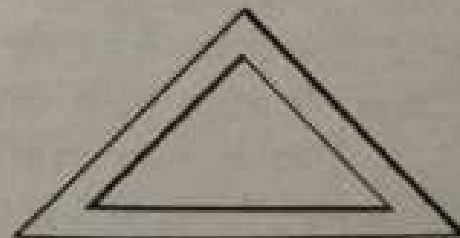
85. समरूप आकृतियाँ. यह प्रश्न उनके लिये है, जो जानते हैं कि ज्यामितीय आकृतियों की समरूपता का क्या अर्थ होता है। दो निम्न प्रश्नों का उत्तर देना है:

1) चित्र 75 के त्रिकोण में भीतरी और बाहरी त्रिभुज समरूप हैं या नहीं?

2) चित्र 76 के क्षेत्र में बाहरी तथा भीतरी आयत समरूप हैं या नहीं?

86. तार की छाया. धूप के दिन टेलीग्राफ के 4 मि० सी० मोटे तार की पूर्ण छाया प्लेन में कितनी दूर तक फैलेगी?

87. ईट. इमारती ईट का



चित्र 75. बाह्य और अंतः त्रिभुज समानुपाती हैं या नहीं?



चित्र 76. बाहरी और भीतरी छायात समानुपाती है या नहीं?

वजन 4 कि० घा० है। उसी सामग्री से परीदे के लिये बनी ईद का वजन क्या होगा, यदि उसकी सभी लंबाईयाँ चार गुना कम हैं?

88. ईंख और बीना. एक मीटर कद के बौने से दो मीटर कद का "दैत्य" लगभग कितना गुना भारी होगा?

89. दो तरबूज. कलघोस बाजार में भिन्न धाकारों के दो तरबूज विक रहे हैं। एक तरबूज दूसरे से चौड़ाई गुना अधिक चौड़ा है और $1\frac{1}{2}$ गुना अधिक महंगा है। कितने खरीदना अधिक लाभकर होगा?

90. दो खरबूजे. एक किन्नर के दो खरबूजे विक रहे हैं। एक की गोलाई (परिधि) 60 से० मी० है और दूसरे की—50 से० मी०। पहला दूसरे से बड़े गुना महंगा है। कितने खरीदने में अधिक फायदा होगा।

91. बेर. बेर में बीज के चारों घोर गूदे की परत बीज अतिनी ही मोटी है। मान लें कि बीज घोर बेर, दोनों ही मोलाकार हैं। क्या प्राय मन ही मन हिसाब लगा सकते हैं कि गूदे का छायातन बीज के छायातन से लगभग कितना गुना बड़ा होगा?

92. पेरिस की मीनार का प्रतिमान. पेरिस की मीनार 300 मीटर ऊँची है। यह पूरी लोहे की है और उसे बनाने में 8,000,000 कि० घा० लोहा खर्च हुआ था। मैं इस विख्यात मीनार का एक बिल्कुल सही लोह प्रतिमान बनवाना चाहता हूँ, जिसका वजन 1 कि० घा० होगा। उसकी ऊँचाई कितनी होगी? आस से कम या अधिक?

93. दो पत्तों के समान प्राकृति के दो पत्तों हैं। दोनों की बीजियों की मुटायें एक हैं। एक में दूसरे से आठ गुनी अधिक जगह है। कितना गुना अधिक भारी है वह?

94. ठंड में एक भादमी धीरे एक बच्चा एक ही तरह से पहने-घोड़े ठंड में खड़े हैं।

किससे अधिक ठंड लग रही है?

72—94 पहेलियों के उत्तर

72. पहली झलक में प्रश्न ज्यामिति से संबंधित नहीं लगता। लेकिन इस विज्ञान की जानकारी तभी सही कही जा सकती है, जब आपको प्रश्न में इधर-उधर के विवरणों से छिपे रेखागणितीय आधार को ढूँढना पता हो। हमारा प्रश्न निस्संदेह रेखागणित का है; रेखागणित की जानकारी वगैरह उसे हल नहीं किया जा सकता।

प्रश्न देखें कि मोटेगाड़ी की घगली धूरी पिछली धूरी की अपेक्षा जल्द क्यों घिसती है। सर्वविदित है कि घगले चक्के पिछले से छोटे होते हैं। एक ही दूरी तय करने में छोटा चक्का बड़े की अपेक्षा अधिक बार घूमता है। छोटे चक्के की परिधि कम होती है और इसीलिए दो गयी दूरी में अधिक बार घोंटती है। इससे स्पष्ट है कि हर सफर में घगले चक्के पिछलों की अपेक्षा अधिक बार घूमते हैं और इससे पूरी बेधाक जल्द घिसती है।

73. यदि आप सोचते हैं कि वीक्ष में हमारा कोण $1\frac{1}{2} \times 4 = 6^\circ$ का दिखेगा, तो आप गलती कर चुके हैं। विज्ञानक से देखने पर कोण की मात्रा नहीं बढ़ती। यह सही है कि कोण बनाने वाला चाप बड़ा दिखने लगेगा। लेकिन इसी अनुपात में चाप की बिज्याओं की लंबाई भी बढ़ जायेगी और केंद्र-स्थित कोण का मान वही रह जायेगा। यह आप चित्र-77 से समझ सकते हैं।

74. चित्र 78 को ध्यानपूर्वक देखें। लेवेल के चाप की पूर्व-स्थिति MAN है। M'BN' उसकी नयी स्थिति है। चापकर्ण M'N' और चापकर्ण MN के बीच का कोण $\frac{1}{2}^\circ$ का है। लेवेल की दोनों स्थितियाँ इस प्रकार घुनी गयी हैं कि बुलबुला पहले की भाँति अब भी A बिंदु पर



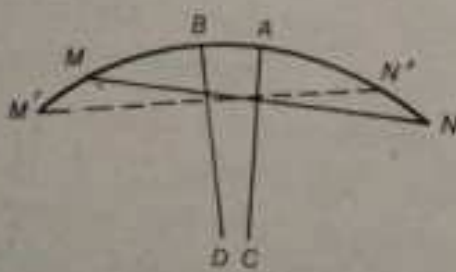
चित्र 77

है, पर चाप MN का मध्य A से B पर खिसक घाया है। चाप AB की संवर्द्धि ज्ञात करनी है, जब कि उसकी त्रिज्या 1 मीटर है और केंद्र पर उसके द्वारा स्थापित कोण $1\frac{1}{2}^\circ$ का है (यह परस्पर लम्ब भुजाओं वाले न्यून कोणों की तुल्यता से ज्ञात होता है)।

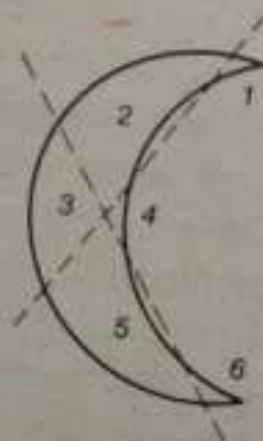
परिकलन जटिल नहीं है। 1 मीटर (1000 मि० मी०) त्रिज्या वाले वृत्त की पूरी परिधि $2 \times 3.14 \times 1000 = 6280$ मि० मी० लम्बी होगी। परिधि केंद्र पर 360° या 720 घड़ै-दिशियाँ बनाती है, अतः एक घड़ै-दिशी का कोण $6280 : 720 = 8.7$ मि० मी० संवा चाप बनायेगा।

बुलबुला अपने चिह्न से लगभग 9 मि० मी० या करीब एक मीटर खिसक घायेगा। आसानी से देखा जा सकता है कि नली की वक्रता की त्रिज्या जितनी बड़ी होगी, लेबल उतना ही संवेदनशील होगा।

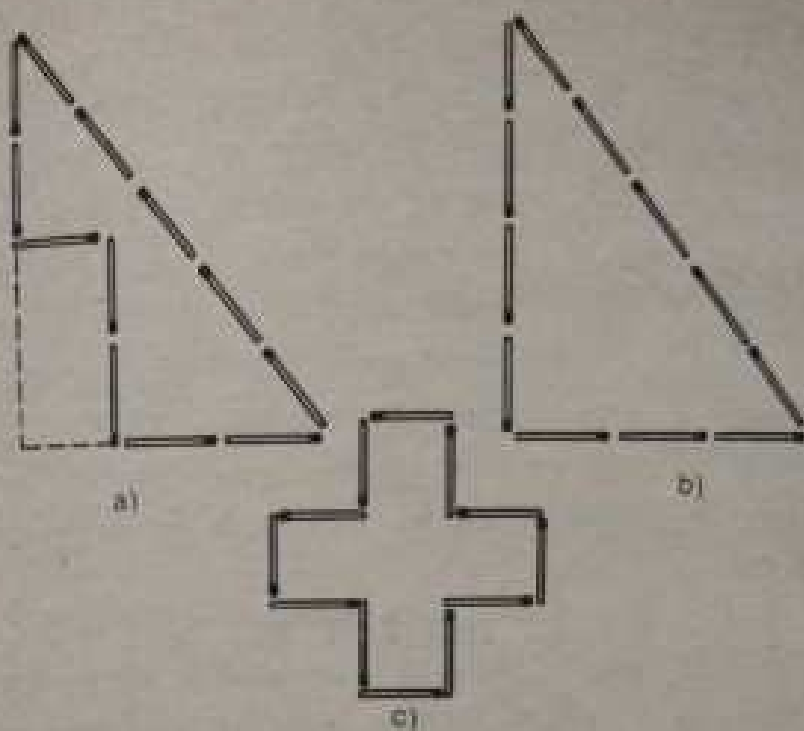
75. प्रश्न मजाक के लिये नहीं दिया गया है; इसमें साधारण शब्द-प्रयोग की गलती छिपी है। "षटफलकीय" पेंसिल के, जैसा कि



चित्र 78



चित्र 79



चित्र 80

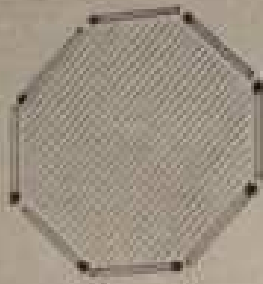
पश्चिमीय लोग सोचते होंगे, 6 फलक नहीं होते। यदि वह छिली नहीं है, तो उसके 8 फलक होंगे: 6 पार्श्वीय और 2 किनारों के। यदि सर्वत्र में उसके छः फलक होते तो उसका आकार चतुर्भुजी काट वाले छद् की भाँति होता।

ग्रिज्म में सिर्फ पार्श्वीय फलकों की गणना करने की गलती काफी प्रचलित है। बहुधा लोग त्रिफलकीय ग्रिज्म, चतुर्फलकीय ग्रिज्म आदि कर्मों का प्रयोग करते हैं। इनको ग्रिज्म के आधार के आकारानुसार त्रिभुज, चतुर्भुजी आदि कहना अधिक उपयुक्त होगा। त्रिफलकीय ग्रिज्म, पर्याप्त तीन फलकों वाला ग्रिज्म, होता भी नहीं है।

दलीलिये पेशित की, जिसका उल्लेख प्रश्न में किया गया है, सप्तफलकीय की बजाय षट्कोण कहना चाहिये।

76. कैसे करना चाहिये - यह चित्र 79 में दिखाया गया है। पूर्णघा के लिये प्राप्त सभी 6 भाग धकों द्वारा निर्दिष्ट हैं।

77. तीलियों को चित्र 80, c की भाँति रखना चाहिये। इस



चित्र 81

आकृति का क्षेत्रफल एक "तीली-वर्ग" का चौगुना है। कैसे इसका विश्वास किया जा सकता है? कल्पना द्वारा इस आकृति को बढ़ा कर एक समकोण त्रिभुज में पूरा करें। इस समकोण त्रिभुज का आधार तीन तीलियाँ हैं और ऊँचाई - 4 तीलियाँ *। इसका क्षेत्रफल आधार और ऊँचाई के गुणनफल का आधा $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ वर्ग तीली होगा

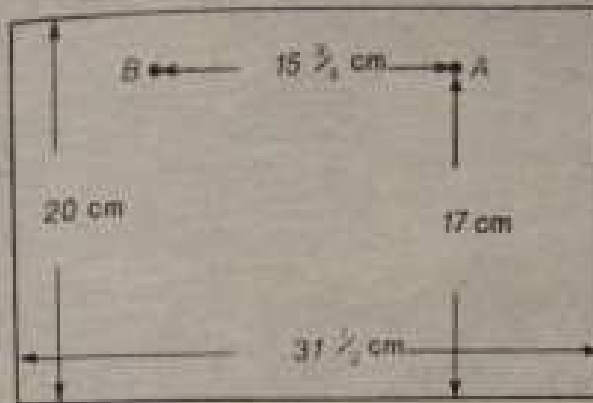
(चित्र 80, b)। पर हमारी आकृति का क्षेत्रफल स्पष्टतः इस त्रिभुज के क्षेत्रफल से 2 वर्ग-तीली कम है। अतः आकृति का क्षेत्रफल 4 वर्ग-तीली है।

78. सिद्ध किया जा सकता है कि समान लम्बाई वाली (या दूसरे शब्दों में, समान परिमिति की) रेखाकृतियों में वृत्त का क्षेत्रफल अधिकतम होता है। निस्संदेह, तीलियों से वृत्त नहीं बनाया जा सकता, पर 8 तीलियों से एक आकृति बनायी जा सकती है (चित्र 81), जो वृत्त के अधिकतम निकट हो। यह समबाहु अष्टकोण है। एकमात्र यही आकृति हमारे प्रश्न की शर्तों को पूरी करती है: इसका क्षेत्रफल अधिकतम है।

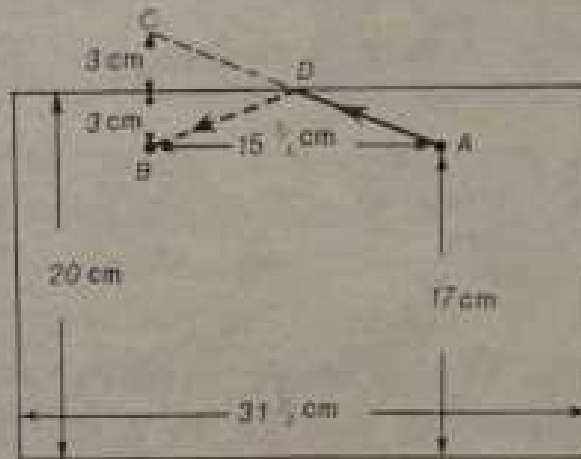
79. प्रश्न हल करने के लिये बेलनाकार बरतन के पार्श्वीय सतह को फैला कर एक समतल आयत का रूप दे दें (चित्र 82)। इसकी ऊँचाई 20 से० मी० होगी और आधार बरतन की परिधि, अर्थात् $10 \times 3\frac{1}{2} = 31\frac{1}{2}$ से० मी० (लगभग) के बराबर होगा। इस आयत पर शहद और मक्खी का स्थान निर्धारित करें। मक्खी बिंदु A पर आधार से 17 से० मी० की ऊँचाई पर है। बंद उसी ऊँचाई की बिंदु B पर है, जो A से अर्ध-परिधि, अर्थात् $15\frac{3}{4}$ से० मी० की दूरी पर है।

बिंदु, जिस पर मक्खी बरतन की दीवार रेंगती हुई पार करेगी, उसे ढूँढ़ने के लिये निम्न बनावट पूरा करें: बिंदु B से (चित्र 83)

* "पिथागोरस साध्य" से परिचित पाठक समझ गये होंगे कि हम विश्वासपूर्वक क्यों कह सकते हैं कि त्रिभुज समकोण ही होगा: $3^2 + 4^2 = 5^2$



चित्र 82



चित्र 83

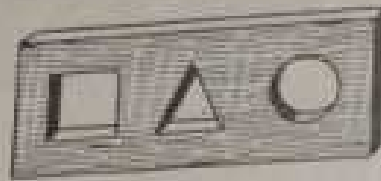
घासत की ऊपरी भूजा पर एक लंब डालें और उसे अपनी मंचाई जितना ही (बिंदु C तक) और बढ़ा दें। C और A बिंदुओं को मिला दें। D वह बिंदु होगी, जिसपर मक्खी रेंगती हुई बरतन के दीवार की दूसरी तरफ जावेगी। पथ ADB न्यूनतम होगा।

बिड़े घासत पर न्यूनतम पथ कूदने के बाद उसे पुनः क्षेत्राकार मोड़ कर हम देख सकते हैं कि यहूद की वृद्ध तक शीघ्र पहुँचने के लिये मक्खी कितना पथ का अनुसरण करेगी (चित्र 84)

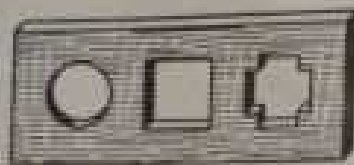
इस प्रकार की स्थितियों में मक्खियाँ ऐसा पथ चुनती हैं या नहीं, यद्वा मुक्ति है। ही सकता है कि गंध से प्रेरित वह सन्तुष्ट न्यूनतम



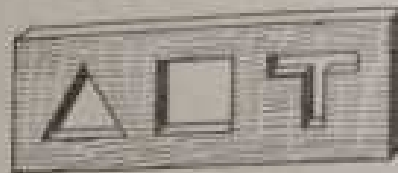
चित्र 84



चित्र 85



चित्र 86



चित्र 87

पथ पर चलती है। पर इसकी संभावना कम ही है; इसके लिये ध्रुव-शक्ति की सर्वदलीलता ही पर्याप्त नहीं है।

80. ऐसा एक डाट बनाना संभव ही संभव है। उसका आकार चित्र 85 में दिखाया गया है। आप आसानी से देख सकते हैं कि इस एक ही डाट से आप त्रिकोण वर्गाकार और गोल तीनों प्रकार के छेद बंद कर सकते हैं।

81. चित्र 86 में दर्शित छेदों (गोल वर्गाकार और क्रॉस-आकार) को बंद करने के लिये भी एक डाट संभव है। इसे चित्र 86 में तीन पार्श्वों से दिखाया गया है।

82. ऐसा भी एक डाट संभव है। चित्र 87 में आप इसे तीन भिन्न स्थितियों से देख सकते हैं।

(ऐसी समस्याओं से अक्षर प्राह्यकारों को वास्ता पड़ता है जब उन्हें मशीन के किसी भाग के किन्हीं तीन प्रक्षेपणों के साधारण पर उसका आकार निर्धारित करना पड़ता है।)

83. बात कितनी भी विचित्र क्यों न लगे पाँच-कोपेकी को दो-कोपेकी के तुल्य छेद से निकालना पूर्ण रूप से संभव है। इसके लिये सिर्फ कागज हाथ में लेना पड़ेगा। कागज को इस प्रकार मोड़ते हैं कि गोल छेद समझ कर एक सीधी दरार में परिवर्तित हो जाये (चित्र 88) : इस दरार से चाप पाँच-कोपेकी सिक्का चार कर सकते हैं।



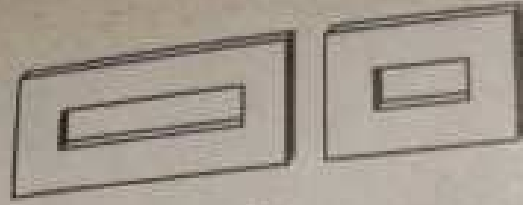
चित्र 88

रेखागणितीय परिकल्पन इस हाथ की सफाई को समझा सकता है। दो-कोपेकी सिक्के का व्यास 18 मि० मी० होता है। उसकी परिधि आसानी से ज्ञात कर सकते हैं: वह 56 मि० मी० से कुछ अधिक होगी। अतः सीधी दरार की लंबाई 28 मि० मी० होगी। चूंकी पाँच-कोपेकी सिक्के का व्यास सिर्फ 25 मि० मी० होता है वह 28 मि० मी० लंबी दरार से सरलतापूर्वक निकल आ सकता है। इसमें उसकी मुटाई ($1\frac{1}{2}$ मि० मी०) कोई बाधा नहीं डालेगी।

84. फोटोशाक के आधार पर मीनार की वास्तविक ऊँचाई ज्ञात करने के लिये पहले फोटो पर मीनार के आधार और उसकी ऊँचाई को सही-सही नाप लेना चाहिये। माना कि फोटो पर मीनार की ऊँचाई 95 मि० मी० तथा आधार 19 मि० मी० है। फिर चाप वास्तविक मीनार के आधार की लंबाई नापते हैं। माना कि वह 14 मी० है। अब चाप निम्न विचारक्रम का अनुसरण करते हैं।

मीनार का फोटो और उसकी वास्तविक परि-आकृति रेखागणित की दृष्टि से समरूप है। अतः फोटो में मीनार की ऊँचाई उसके आधार से कितनी गुनी अधिक होगी, वास्तविक मीनार की ऊँचाई उसके आधार से उतनी ही गुनी अधिक होगी। प्रथम अनुपात $95 : 19 = 5$ है। अतः निश्चय निकलता है कि मीनार की वास्तविक ऊँचाई उसके आधार से 5 गुनी अधिक है: $14 \times 5 = 70$ मी०।

मीनार की ऊँचाई 70 मीटर है।



चित्र 89

उल्लेख है कि मीनार की ऊँचाई ज्ञात करने के लिये हर तरह का फोटो नहीं प्रयुक्त हो सकता। इसके लिये ऐसा फोटो चाहिए, जिसमें उसके अनुपात बिगड़े न हों, जैसा कि अक्सर नौसिखुर फोटोग्राफरों द्वारा खींचे गये फोटो में होता है।

85. तीन प्रकार दोनों ही प्रश्नों के लिये सकारात्मक उत्तर देते हैं। पर वास्तव में सिर्फ त्रिभुज समरूप हैं। फ्रेम की आकृति में बाहरी और भीतरी आयत समरूप नहीं हैं। त्रिभुजों की समरूपता के लिये उनके कोणों का बराबर होना पर्याप्त है। चूँकि दिये गये त्रिकोण की बाह्य भुजायें आंतरिक भुजाओं के समानांतर हैं, दोनों ही - बाह्य तथा आंतरिक - आकृतियाँ समरूप हैं। अन्य बहुभुजों की समरूपता के लिये उनके कोणों का बराबर होना (या दूसरे शब्दों में, उनकी भुजाओं का समानांतर होना) पर्याप्त नहीं है। इसके लिये बहुभुजों की भुजाओं का समानुपाती होना भी आवश्यक है। फ्रेम जैसी आकृति के भीतरी और बाहरी चतुर्भुज तभी समरूप हो सकते हैं, जब वे वर्ग (या कोई भी समबाहु चतुर्भुज) हों। सभी अन्य स्थितियों में बाह्य चतुर्भुज की भुजायें आंतरिक चतुर्भुज की भुजाओं के समानुपाती नहीं होंगी और इसीलिये ये दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं होंगी। समरूपता की अनुपस्थिति चित्र 89 जैसी चौड़े फ्रेम वाली आकृति में स्पष्ट दिखती है। बायें फ्रेम में बाह्य भुजाओं का अनुपात 2 : 1 और आंतरिक भुजाओं का अनुपात 4 : 1 है। दायें फ्रेम में ये अनुपात क्रमशः 4 : 3 और 2 : 1 है।

86. बहुतों को धारण्य होगा कि इस प्रश्न के हल के लिये खगोल-



चित्र 90

साक्ष्य की भी जखुरत पड़ सकती है, क्योंकि हमें पृथ्वी से सूरज तक की दूरी और सूरज का व्यास जानना होगा।

तार द्वारा व्योम में प्रक्षिप्त पूर्ण छाया की लंबाई चित्र 90 की रेखागणितीय बनावट द्वारा निर्धारित होती है। आसानी से देख सकते हैं कि छाया तार के अनुप्रस्थ से उतनी ही गुनी अधिक लंबी है, जितनी पृथ्वी से सूरज की दूरी (150 000 000 कि० मी०) सूरज के अनुप्रस्थ (1400 000 कि० मी०) से बड़ी है। आखिरी अनुपात लगभग 115 के बराबर है। अतः तार द्वारा व्योम में प्रक्षिप्त पूर्ण छाया की लंबाई होगी

$$4 \times 115 = 460 \text{ कि० मी०} = 46 \text{ से० मी०।}$$

पूर्ण छाया की लंबाई इतनी कम होने के कारण ही हम उसे पृथ्वी या चरों की दीवारों पर नहीं देख पाते। वे धुंधली धारियाँ, जो हमें दृष्टिगोचर होती हैं, छाया नहीं, बल्कि अर्धछाया हैं।

ऐसे प्रश्नों के हल की एक अन्य विधि 8-वीं पहेली में बतायी गयी थी।

87. परदि की ईंट का वजन । कि० घा० होगा, अर्थात् वह इमारती ईंट से सिर्फ चार गुना कम भारी होगी—ऐसा उत्तर बिल्कुल गलत है। सिर्फ उसकी लंबाई ही चार गुनी कम नहीं है; उसकी चौड़ाई और ऊँचाई भी चार-चार गुनी कम है। उसका आयतन $4 \times 4 \times 4 = 64$ गुना कम है। अतः सही उत्तर होगा:

$$\text{परदि की ईंट का वजन } 4000 : 64 = 62,5 \text{ घा०।}$$

88. इस प्रश्न के हल के लिए आवश्यक ज्ञान आपको प्राप्त हो चुका है। चूंकि मानव-शरीर की आकृतियाँ लगभग समरूप होती हैं, इतना कद होने पर धादमी का आयतन दो गुना नहीं, बल्कि 8 गुना अधिक होगा। अतः हमारा "दैत्य" 8 गुना अधिक भारी होगा।

सबसे ऊँचा "दैत्य", जिसके बारे में इतिहास बताता है, एल्जास का निवासी था। उसका कद था 275 से० मी०। यह धादमी की औसत ऊँचाई से एक मीटर अधिक है। सबसे छोटे जीने का कद 90 से० मी० से कुछ कम था, अर्थात् वह उक्त एल्जास निवासी से लगभग 7 गुना कम ऊँचा था। अतः, यदि तराजू के एक पल्ले पर

एकवर्ती "ईस" को रखा जावे, तो दूसरे पन्ने पर संतुलन के लिये $7 \times 7 \times 7 = 343$ बीनों को खड़ा करना पड़ेगा। यह बीनों की पूरी भौत होगी।

89. बड़े तरबूज का घायतन छोटे से

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64}$$

अर्थात् लगभग दुगुना बड़ा होगा। अतः बड़ा तरबूज खरीदना अधिक फायदेमंद होगा: उसकी कीमत सिर्फ़ डेढ़ गुनी अधिक है और उसमें आधास गुना है।

फिर बेचने वाले ऐसे तरबूजों की कीमत डेढ़ गुनी की बजाय दुगुनी अधिक क्यों नहीं रखते? बात यह है कि बेचने वाले अधिकांशतः रेखागणित का इतना ज्ञान नहीं रखते। वैसे, खरीददार भी उसमें कमबोर ही होते हैं, जब वे ऐसे लाभप्रद मौके से अवसर इन्कार करते हैं। बिना किसी डर के कहा जा सकता है कि छोटे तरबूजों की बजाय बड़े तरबूज खरीदना हमेशा फायदेमंद है, क्योंकि उनकी कीमत उनके वास्तविक मूल्य से कम आंकी जाती है। पर अधिकांश खरीददार इसकी कल्पना भी नहीं करते।

इसी कारणवश, छोटे घंड़ों की अपेक्षा बड़े घंड़े खरीदना अधिक लाभकर है, यदि उनकी कीमत वजन के अनुसार नहीं आंकी जाती।

90. वृत्तों की परिधियों का अनुपात उनके व्यासों के अनुपात के बराबर होता है (परिधि और व्यास समानुपाती होते हैं)। यदि एक खरबूजे की परिधि 60 से० मी० है और दूसरे की 50 से० मी०, तो उनके व्यासों का अनुपात $60 : 50 = \frac{6}{5}$ और उनके आयतनों का अनुपात

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} \approx 1.73 \text{ होगा।}$$

आयतन (या वजन) के अनुसार बड़े खरबूजे की कीमत छोटे से 1.73 गुना, अर्थात् 73% अधिक आंकी जानी चाहिये। पर उसके लिये सिर्फ़ 50% अधिक मांग रहे हैं। लाभ ही लाभ है!

91. प्रकृत की शक्त के अनुसार बेर का व्यास बीज के व्यास से

तीन गुना अधिक है। अतः बेर का आयतन बीज के आयतन से $3 \times 3 \times 3 = 27$ गुना अधिक है। बेर में बीज का अंश $\frac{1}{27}$ है और बाचांन - बाकी $\frac{26}{27}$ । अतः आयतनानुसार बाचांश बीज से 26 गुना अधिक है।

92. यदि मान से प्रतिमान 8 000 000 गुना हल्का है और दोनों एक ही धातु के बने हैं, तो प्रतिमान का आयतन मान के आयतन से 8 000 000 गुना कम होगा। हमें ज्ञात है कि समरूप पिंडों के आयतन उनकी घन-ऊँचाइयों के समानुपाती होते हैं। अतः प्रतिमान मान से 200 गुना कम ऊँचा होना चाहिये, क्योंकि

$$200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000$$

वास्तविक मीनार की ऊँचाई 300 मी० है। अतः उसके प्रतिमान की ऊँचाई

$$300 : 200 = 1\frac{1}{2} \text{ मी० होगी।}$$

प्रतिमान लगभग धारमी के कद के बराबर होगा।

93. रेखागणित की दृष्टि से दोनों ही पतले समरूप पिंड हैं। यदि बड़े पतले में 8 गुना अधिक स्थान है, तो उसके सभी रेखिल माप दो गुना अधिक हैं: वह दुगुना ऊँचा तथा सब ओर से दुगुना चौड़ा है। यदि वह दुगुना ऊँचा तथा दुगुना चौड़ा है, तो उसकी सतह का क्षेत्रफल 2×2 , अर्थात् चार गुना अधिक होगा, क्योंकि समरूप पिंडों की सतहों के क्षेत्रफल उनके रेखिल मापों के वर्गों के समानुपाती होते हैं। बीजारों की मुटाई समान होने पर उनका भार उनकी सतहों के क्षेत्रफलों पर निर्भर करेगा। अतः प्रश्न का उत्तर है: बड़ा पतला छोटे से चौगुना भारी है।

94. प्रथम दृष्टि में यह प्रश्न गणित से संबंधित नहीं लगता, पर इसका हल सारतः उन्हीं रेखागणितीय तर्कों द्वारा होता है, जिनका प्रयोग हमने पिछले प्रश्न के हल में किया था।

प्रश्न को हल करने के पहलू हम इसी प्रकार का एक दूसरा, अधिक सरल प्रश्न देखते हैं।

एक ही धातु से बनी दो कतलियाँ हैं। एक छोटी है और एक बड़ी है। दोनों ही गर्म पानी से भरी हैं। कौन जल्द ठंडी होगी?

चीजे गुणवत्तः अपनी सतहों पर से ठंडी होती है। अतः पहले वह केतली ठंडी होगी, जिसके इकाई आयतन की सतह अधिक है। यदि एक केतली दूधरी से 11 गुनी ऊँची तथा 11 गुनी चौड़ी है, तो उसकी कुल सतह का क्षेत्रफल 11² गुना अधिक होगा और उसका आयतन 11³ गुना अधिक होगा। बड़ी केतली में इकाई क्षेत्रफल की सतह के लिये छोटी केतली से 11 गुना अधिक आयतन है। अतः छोटी केतली जल्द ठंडी होगी।

इन्हीं कारणों से हिमपात में बड़े बच्चे को बड़े से अधिक ठंड लगेगी, चाहे उनके कपड़े-सूते एक से ही क्यों न हों। उनके शरीरों के हर घन से० मी० में ताप की लगभग एक ही मात्रा उत्पन्न होती है, पर बच्चे के शरीर के प्रति घन से० मी० के लिये ताप खोने वाली सतह घावमी के शरीर से कहीं ज्यादा है।

हाथ-पैर की उंगलियाँ ठंड से जल्द थोकड़ती हैं और सर्पिली हवा में जल्द जम जाती हैं। इसका भी कारण यही है कि शरीर के अन्व भागों की सतहों का क्षेत्रफल उनके आयतनों की तुलना में उतना अधिक नहीं होता।

इसी से संबंधित एक और प्रश्न है :

लकड़ी के कुदे की अपेक्षा उससे काट कर बनायी गयी चैलियाँ क्यों जल्द जलती हैं?

चूंकि तपन पिंडों की सतह से शुरू होती है और फिर उसके पूरे आयतन पर फैलती है, वर्गाकार अनुप्रस्थ वाली चैली की सतह व आयतन की तुलना उसी लंबाई वाले (और उसी प्रकार के वर्गाकार अनुप्रस्थ वाले) कुदे की सतह व आयतन के साथ करनी चाहिये। तभी ज्ञात होगा कि दोनों ही स्थितियों में इकाई घन से० मी० लकड़ी के लिये कितनी सतह है। यदि कुंदा चैली से 10 गुना मोटा है, उसका आयतन 100 गुना अधिक होगा। अतः चैली में इकाई सतह के हिस्से में कुदे की अपेक्षा 10 गुना कम आयतन आयेगा : ताप की एक ही मात्रा को चैली के लिये 10 गुना कम पदार्थ जलाना पड़ता है और इसीलिये ताप के एक ही स्रोत से कुदे की अपेक्षा चैली जल्द जलती है। (लकड़ी के बुरे ताप-संचारक होने के कारण उपरोक्त अनुपातों को समीपवर्ती भर मानना अधिक उपयुक्त होगा : वे प्रक्रियाओं की सामान्य गति की विशेषता निर्दिष्ट करते हैं, उसके परिमाणात्मक पक्ष को नहीं।)

अध्याय 10

बारिश और हिमपात की ज्यामिति

95. बृष्टिमापी. जनसर कहते हैं कि लेनिनग्राद बहुत ही बारिश का क्षेत्र है, मास्को से कहीं अधिक। पर वैज्ञानिकों का मत कुछ और ही है। वे कहते हैं कि मास्को को वर्षा से अधिक पानी प्राप्त होता है, बनिस्वत कि लेनिनग्राद को। कैसे वे ज्ञात करते हैं? क्या यह नापना संभव है कि वर्षा अपने साथ कितना पानी लाती है?

यह कठिन प्रतीत होता है, पर बारिश का हिसाब-किताब रखना घाप भी सीखा सकते हैं। यह मत सोचिये कि इसके लिये आपको बारिश का सारा पानी जमा करना पड़ेगा। इसके लिये आपको सिर्फ उस परत की मुटाई को नापना पड़ेगा, जो वर्षा के रूप में गिरे पानी से बनती है, यदि यह पानी जमीन द्वारा सोखा न जाये या इधर-उधर बह न जाये। और यह कोई कठिन काम नहीं है। क्योंकि जब वर्षा होती है, उसकी बूंदे सारे क्षेत्र पर समान रूप से पड़ती हैं: ऐसा नहीं होता कि किसी के बाड़े में कम बूंदे पड़ें और दूसरे में अधिक। यदि हम पूरे क्षेत्र के सिर्फ एक छोटे हिस्से में गिरे पानी की परत की मुटाई नापें, तो सारे क्षेत्र में गिरे पानी की मुटाई ज्ञात हो जायेगी।

अब शायद आप समझ गये होंगे कि वर्षा के रूप में गिरे पानी की परत की मुटाई नापने के लिये क्या करना चाहिये। इसके लिये कोई ऐसा क्षेत्र बनाना चाहिये, जिसमें वर्षा की बूंदे स्थिर रहें और जमीन में सोखी न जायें। कोई भी खुला बरतन, जैसे बाल्टी, यह काम कर सकता है। यदि आपके पास खड़ी दीवारों वाली बाल्टी हो (ऐसी कि ऊपर के सीधे तक उसकी चौड़ाई समान हो), तो उसे एक खुली

जगह पर रख दीजिये।* जब बारिश बरतन हो जाये, उसमें एकत्रित पानी की ऊँचाई नाप लीजिये—परिकल्पन के लिये आवश्यक सामग्री चापको पूर्ण रूप से प्राप्त हो जायेगी।

अब इस परेडू "वृष्टिमापी" को सविस्तार देखें। बाल्टी में पानी के स्तर को किस प्रकार नापा जाये? क्या उसमें लंबाई नापने की स्केल चुसा दे? लेकिन यह तभी सुविधाजनक होगा, जब बाल्टी में पानी काफी हो। यदि पानी की परत, जैसा कि भस्मार होता है, 2—3 से० मी० या सिर्फ़ मि० मी० मोटी हो, तो इस विधि से उस की मुटाई सही-सही नापना असंभव है। यहाँ एक एक मिलीमीटर, यहाँ तक कि उसका दशांश भी महत्त्व रखता है। फिर क्या किया जाये?

बेहतर होगा कि घाग पानी की शीशे के किमी सँकरे बरतन में डाल दें। ऐसे बरतन में पानी की सतह ऊँची होगी और पारदर्शक दीवार से सुगमतापूर्वक दिख सकेगी। घाग समझ रहे होंगे कि सँकरे बरतन में पानी की सतह उस परत की मुटाई नहीं बताती, जिसे हम नापना चाहते हैं। लेकिन एक नाप को दूसरी में परिवर्तित करना आसान है। माना कि सँकरे बरतन के तल का व्यास हमारे "वृष्टि-मापी" के तल से दस गुना कम है। अतः उसके तल का क्षेत्रफल बाल्टी के तल के क्षेत्रफल से 10×10 , अर्थात् 100 गुना कम है। स्पष्ट है कि बाल्टी से उसमें डाले गये पानी का स्तर 100 गुना अधिक ऊँचा होगा। अर्थात्, यदि बाल्टी में पानी की परत 2 मि० मी० मोटी थी, तो सँकरे बरतन में वह 200 मि० मी० या 20 से० मी० मोटी होगी।

इस परिकल्पन से घाग देखते हैं कि शीशे का बरतन बाल्टी से बहुत अधिक संकीर्ण नहीं होना चाहिये, अन्यथा उसे काफी ऊँचा होना पड़ेगा। पर्याप्त रहेगा, यदि घाग बाल्टी से सिर्फ़ 5 गुना सँकरा शीशे का बरतन लेते हैं। इस हालत में उसके तल का क्षेत्रफल 25 गुना कम होगा और उसमें डाले गये पानी का स्तर उतना ही गुना ऊँचा उठेगा। बाल्टी में एक मि० मी० मोटी पानी की परत शीशे के

* बाल्टी को किसी ऊँची जगह पर रखना चाहिये, ताकि वर्षा की बूँदों के जमीन पर टकराने से बने छींटे उसमें न पड़े।

बरतन में 25 मि० मी० मोटी परत बनायेगी। घत: घण्टा होगा, यदि आप बीजे के बरतन पर बाहर से एक कागज की पट्टी चिपका दें और उस पर 25-25 मिनिमीटरों की दूरी पर निशान लगा लें और उन्हें 1,2,3 आदि से क्रमांकित कर दें। तब आप सँकरे बरतन में पानी की ऊँचाई देख कर बिना किसी परिकलन के ज्ञात कर लेंगे कि बाल्टी में उसकी क्या ऊँचाई थी। यदि सँकरे बरतन की चौड़ाई 5 गुनी नहीं, बल्कि चार गुनी कम है, तो निशान हर 16 मि० मी० के अंतराल पर बनाने होंगे।

सँकरे मापन-पात्र में बाल्टी की किनारी से पानी डालना काफी असुविधाजनक है। बाल्टी की दीवार में एक छोटा गोल छेद कर देना और उसे बीजे की डाट से बंद रखना बेहतर रहेगा। इस छेद से पानी डालना कहीं अधिक सुविधाजनक होगा।

अब आपके पास वर्षा-जल की परत कितनी मोटी है, मापने का उपकरण तैयार है। निस्संदेह, बाल्टी और घरेलू मापन-पात्र वर्षा की जतनी सही माप नहीं बता सकते, जितनी की मौसम-अध्ययन केंद्रों में प्रयुक्त होने वाले वास्तविक वृष्टि-मापी और मापन-पात्र बता सकते हैं। फिर भी, आपके सरलतम सस्ते उपकरण कई अत्यंत ज्ञानवर्धक परिकलन संपन्न करने में सहायक हो सकते हैं।

ये ही परिकलन अभी हम करेंगे।

96. कितना पानी? मान लीजिये कि आपके पास 40 मीटर लंबा और 24 मीटर चौड़ा एक बाड़ा है। पानी बरसा और आप जानना चाहते हैं कि बाड़े में कितना पानी पड़ा। कैसे यह ज्ञात करें?

शुरुआत निस्संदेह वर्षा-जल की परत की मोटाई के निर्धारण से करते हैं: इस आंकड़े के बिना कोई भी परिकलन असंभव है। माना कि आपका वृष्टि-मापी बताता है कि वर्षा से 4 मि० मी० मोटी पानी की परत बनती है। हिसाब करें कि बाड़े के प्रति वर्ग मीटर क्षेत्र पर कितना पन से० मी० पानी होता, यदि जमीन में सोखा नहीं जाता। एक वर्ग मीटर की लंबाई 100 से० मी० तथा चौड़ाई 100 से० मी० होती है। उस पर 4 मि० मी० या 0.4 से० मी० मोटी पानी की परत है। अतः पानी की इस परत का आयतन $100 \times 100 \times 0.4 = 4000$ पन से० मी० होगा।

घाप जानते हैं कि 1 घन से० मी० पानी का वजन 1 ग्राम होता है। अतः बाड़े के हर वर्ग मीटर क्षेत्र पर 4000 ग्राम, अर्थात् 4 कि० ग्रा० पानी पड़ा है। बाड़े में कुल $40 \times 24 = 960$ वर्ग मीटर हैं। अतः वर्षा लगभग 4 टन ($4 \times 960 = 3840$ कि० ग्रा०) पानी से बाड़े की सिंचाई करती है।

वृष्य-सुगमता के लिये यह भी परिकल्पन कर ले कि इतने पानी से यदि घापको बाड़े की सिंचाई खुद करनी होती, तो घापको कितनी बाल्टियाँ डोनी पड़ती। एक बाल्टी में लगभग 12 कि० ग्रा० पानी घाटा है। अतः बारिश से कुल $3840 : 12 = 320$ बाल्टी पानी मिला है;

इस प्रकार, करीब-बीसार्ध फंटे की वर्षा द्वारा की गई सिंचाई के मुख्य काम करने के लिये घापको 300 से अधिक बाल्टी पानी डोना पड़ता।

संख्याओं में हल्की या धीरे वर्षा को कैसे व्यक्त करेंगे? इसके लिये निर्धारित करना होगा कि एक मिनट में कितना मिलिमीटर पानी पड़ता है। इसे हम अवसादन-राशित कहते हैं। यदि वर्षा ऐसी हो कि प्रति मिनट औसत 2 मि० मी० पानी की परत बनती है, तो यह पनचोर वर्षा है। जब शीसी पड़ती है, तो फंटे या इससे भी अधिक समय में कहीं 1 मि० मी० पानी जमा होता है।

इस प्रकार घाप देखते हैं कि वर्षा के रूप में गिरने वाले पानी को नापना असंभव नहीं है और कुछ जटिल भी नहीं है। यही नहीं, यदि घाप चाहें तो वर्षा की बूंदों भी लगभग की संख्या में ज्ञात कर सकते हैं।* साधारण वर्षा की 12 बूंदें मिलकर एक ग्राम के बराबर होती हैं। अतः जिस वर्षा की बात हम ऊपर कर रहे थे, बाड़े के एक वर्ग मीटर क्षेत्र में उसकी $4000 \times 12 = 48000$ बूंदें पड़ी थीं।

आप यह भी ज्ञात कर सकते हैं कि पूरे बाड़े पर वर्षा की कितनी बूंदें गिरी होंगी। लेकिन बूंदें आप सिर्फ मनोरंजन के लिये गिन सकते हैं; इससे कोई व्यावहारिक लाभ नहीं है। हम सिर्फ यह दिखाना

*वर्षा हमेशा बूंदों के रूप में होती है; तब भी, जब वह सतत धार के रूप में प्रतीत होती है (जैसे मुसलाधार वर्षा में)।

चाहते थे कि पहली निगाह में अर्थात् प्रतीत होने वाले परिकल्पन भी संपन्न किये जा सकते हैं, यदि आपको करना आता हो।

97. कितना हिम? हम वर्षा के रूप में गिरे पानी की मात्रा ज्ञात करना सीख चुके हैं। धीरे धीले के रूप में गिरे पानी को कैसे नापें? ठीक उसी विधि से। धीले वृष्टिमापी में गिरते हैं धीरे धीले देर में पिघल कर जल में परिवर्तित हो जाते हैं। आप इस जल को नाप लेते हैं धीरे आपको आवश्यक आंकड़े मिल जाते हैं।

बर्फ के फाहों के रूप में गिरे पानी को अन्य विधि से नापना पढ़ता है। यहाँ हमारा वृष्टि-मापक अत्यंत बशुद्ध परिणाम देगा, क्योंकि बाल्टी में गिरे बर्फ के फाहे हवा के झोंके से पुनः वातावरण में उड़ जाते हैं। लेकिन इस हिमपात से प्राप्त पानी को नापने के लिये बिना किसी वृष्टि-मापी के भी काम चला सकते हैं: घांगन, बाढ़े या खेत में पड़ी बर्फ की परत को लकड़ी के किसी गज या मीटर से सीधा नापा जा सकता है। इस बर्फ के पिघलने से पानी की कितनी मोटी परत बनेगी, यह ज्ञात करने के लिये एक प्रयोग करते हैं: एक बाल्टी में उतनी ही भुरभुरी बर्फ ले कर उसे पिघलने के लिये छोड़ दें। इसके बाद आप देख सकते हैं कि पानी की कितनी मोटी परत बनती है। इस प्रकार आप निर्धारित कर सकते हैं कि बर्फ की एक सेंटीमीटर मोटी परत से पानी की कितनी मिलिमीटर मोटी परत प्राप्त होगी। यह जान लेने के बाद बर्फ की परत को पानी की परत में बदलना कठिन नहीं होगा।

यदि आप हर दिन बिना नापा गमियों में वर्षा का जल नापेंगे और उसमें सर्दियों की बर्फ से बना पानी जोड़ देंगे, तो आप स्थानीय क्षेत्र में गिरने वाले पानी की वार्षिक मात्रा ज्ञात कर लेंगे। यह एक महत्वपूर्ण परिणाम होगा, जो उन्नत क्षेत्र में अवसादन की कुल मात्रा बताता है। ("अवसादन" वातावरण से गिरने वाले जल को कहते हैं, चाहे वह वर्षा के रूप में गिरे, या धीले या बर्फ आदि के रूप में गिरे।)

संविद्यत संघ में विभिन्न नगरों में अवसादन की वार्षिक मात्रा निम्न है:

लेनिनपाद	47 सें० मी०	घास्त्राखान	14 सें० मी०
बोतगा	45 "	कुताइसी	179 "
घरमिस्तक	41 "	बाकु	24 "
मानचो	55 "	स्वेदनीयक	36 "
कस्त्रोमा	49 "	तबील्क	43 "
कजान	44 "	सेमीपलातिन्क	21 "
कुइबिसेव	39 "	खन्ना-आता	51 "
पोरेतबुर्ग	43 "	ताशाकेन्त	31 "
पोरेसा	40 "	पेनिसेइस्क	39 "
		इरकुल्क	44 "

उपरोक्त स्थानों में आकाश से सबसे अधिक जल कुताइसी को प्राप्त होता है (179 सें० मी०) और सबसे कम घास्त्राखान को (14 सें० मी०); कुताइसी से 13 गुना कम। पृथ्वी-तल पर ऐसे भी स्थान हैं, जहाँ कुताइसी से भी बहुत अधिक अवसादन होता है। उदाह-
हरण के लिये, भारत में एक स्थान अक्षरशः वर्षा के पानी से डूब जाता है; वहाँ 1260 सें० मी०, अर्थात् 12¹/₂ मीटर वर्षा होती है! एक बार ऐसा भी हुआ था कि एक दिन-रात में वहाँ 100 सें० मी० से भी अधिक पानी पड़ा। इसके विपरीत, ऐसे भी स्थान हैं, जहाँ साल में घास्त्राखान से भी बहुत कम पानी पड़ता है: दक्षिण अमेरिका के एक क्षेत्र, चीली में पूरे वर्ष भर में 1 सें० मी० भी पानी नहीं पड़ता।

वे क्षेत्र, जहाँ 25 सें० मी० से कम अवसादन होता है, सूखे का क्षेत्र कहलाते हैं। वहाँ अन्नोत्पादन बिना कृत्रिम सिंचाई के नहीं हो सकता।

यदि आप का निवास ऊपर गिनाये स्थानों में से किसी एक में नहीं है, तो आपको अपने क्षेत्र में अवसादन की वार्षिक मात्रा स्वयं निर्धारित करनी पड़ेगी। वर्षपूर्वक पूरे साल वर्षा, धोले और हिम के रूप में गिरने वाले पानी को नापने के बाद आप ज्ञात कर सकेंगे कि प्राइमेटा के दृष्टिकोण से सोवियत संघ के अन्य नगरों के बीच आपके शहर को कौनसा स्थान प्राप्त है।

समझना कठिन नहीं है कि पृथ्वी-तल के विभिन्न क्षेत्रों में अवसादन-मात्रा नाप कर प्राप्त आँकड़ों से यह ज्ञात किया जा सकता है कि सारी धरती पर अवसादन के फलस्वरूप पानी की कितनी मोटी परत बन सकती है। ज्ञात होता है कि सारे बल पर (सागरों पर प्रेक्षण नहीं किया जाता) वर्ष में अवसादन की मात्रा औसतन 78 सें० मी० है। यह माना जाता है कि सागर तल पर उतना ही पानी पड़ता है, जितना समान क्षेत्रफल वाले बल पर। परिकलन करना कठिन नहीं होगा कि हमारे यह पर वर्षा, झोले, हिम आदि रूपों में प्रति वर्ष कितना पानी पड़ता है। इसके लिये पृथ्वी-तल का क्षेत्रफल जानना होगा। यदि आप यह परिमाण कहीं से ज्ञात नहीं कर सकते, तो निम्न विधि से, स्वयं इसका परिकलन कर ले सकते हैं।

आपको ज्ञात है कि एक मीटर पृथ्वी की परिधि का 4-करोड़वाँ अंश है (परिभाषा से)। अन्य शब्दों में, पृथ्वी की परिधि 40 000 000 मीटर, अर्थात् 40 000 कि० मी० है। किसी भी वृत्त की चौड़ाई उसकी परिधि से लगभग $3\frac{1}{7}$ गुनी कम होती है। इस सूचना के आधार पर हम अपने यह का व्यास ज्ञात कर सकते हैं:

$$40\,000 : 3\frac{1}{7} \approx 12\,700 \text{ कि० मी०.}$$

किसी भी गोले की सतह का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि यह है: उसकी चौड़ाई को स्वयं से और $3\frac{1}{7}$ से गुणा कर देते हैं

$$12\,700 \times 12\,700 \times 3\frac{1}{7} \approx 509\,000\,000 \text{ वर्ग कि० मी०.}$$

(उत्तर में चौथे अंक से हम शून्य लिखना शुरू कर देते हैं, क्योंकि निर्धम प्रथम तीन अंक विश्वसनीय हैं।)

इस प्रकार, समस्त पृथ्वी-तल का क्षेत्रफल 5090 लाख वर्ग कि० मी० है।

अब हम अपने प्रश्न की ओर लौटें। हिसाब लगायें कि प्रति वर्ष कि० मी० पृथ्वी-तल पर कितना पानी पड़ता है। एक वर्ग मीटर या 10 000 वर्ग सें० मी० पर पानी पड़ता है

$$78 \times 10\,000 = 780\,000 \text{ घन सें० मी०.}$$

एक वर्ग कि० मी० में $1000 \times 1000 = 1,000,000$ वर्ग मीटर होते हैं। अतः उस पर $780,000,000,000$ घन से० मी० या $780,000$ घन मीटर पानी पड़ता है।

सारे पृथ्वी-तल पर पड़ता है

$$780,000 \times 509,000,000 = 397,000,000,000,000 \text{ घन मीटर।}$$

घन मीटरों की इस संख्या को घन कि० मी० की संख्या में परिवर्तित करने के लिये इसमें $1000 \times 1000 \times 1000$ से भाग देते हैं। प्राप्त होता है $397,000$ घन कि० मी०।

इस प्रकार हम देखते हैं कि हमारे ग्रह पर वातावरण से प्रति वर्ष लगभग $400,000$ घन किलोमीटर पानी खवसाहित होता है।

यहाँ हम बारिश और हिमपात की ज्यामिति पर अपनी चर्चा समाप्त करते हैं। जो कुछ भी इस अध्याय में कहा गया है, मौसम-विज्ञान की पुस्तकों में आप सविस्तार पढ़ सकते हैं।

गणित और "प्रलय-पुराण"

98. प्रलय-कथा. बाइबिल में संकलित कथाओं में एक ऐसी भी है, जिसके अनुसार एक बार सारी धरती वर्षा के जल से डूब गयी थी। ऊँचे से ऊँचे पर्वत भी जल-लीन थे। बाइबिल के अनुसार, एक बार भगवान को "पाश्चाताप होने लगा कि उसने मनुष्य की सृष्टि की"। उसने कहा :

-जिनको मैंने रचा है, धरातल से मिटा दूंगा; मनुष्यों से ले कर पशुओं तक, सरीसृपों से ले कर नभगामी पक्षियों तक, सब को नष्ट कर दूंगा।

पुण्यात्मा नूह ही एक आदमी था, जिस पर भगवान दया करना चाहते थे। भगवान ने उसे प्रलय की तैयारी के बारे में बताया और एक नाव बनाने की आज्ञा दी, जिसका आकार निम्न था: "नाव की लंबाई 300 हाथ, चौड़ाई 50 हाथ और ऊँचाई 30 हाथ होनी चाहिये।" नाव तिमजिला थी। इस नाव से सपरिवार नूह की ही नहीं, बल्कि जीवों के सभी प्रकारों की भी रक्षा होने वाली थी। भगवान ने नूह को सभी जीवों के एक-एक जोड़े को अपनी नाव में शरण देने की आज्ञा दी। नूह को उनके लिये भोजन-सामग्री का पर्याप्त भण्डार भी साथ रखना था: प्रलय-सीला काफी दिनों तक चलने वाली थी।

दुनिया के धल-जीवियों को नष्ट करने का साधन भगवान ने बाढ़ की बना। जमीन पर जीने वाले सभी जंतुओं और लोगों को जल में डूबा देना था। नूह और उसके द्वारा बचाये गये जीवों से नयी मानव-जाति और नये जीव-जगत को उत्पन्न होगा था।

"सातवें दिन, -बाइबिल धामे कहती है, -बाढ़ का पानी जमीन पर उतरा... 40 दिन और 40 रात मूजसाधार वर्षा होती रही... पानी बढ़ता गया और बाढ़ को ऊपर उठाता गया; और वह बेसहारा पर्वत-शिखर रहा था... पानी इतना अधिक हो गया कि सभी ऊँचे पर्वत-शिखर, जो नीचे नम के नीचे गडिग खड़े थे, डूब गये; पानी की बाढ़ उनसे 15 हाथ ऊँची थी... सारी धरती के तल पर जो भी जीव थे, डूब गये। बचे सिर्फ नूह और जो उसके साथ थे।" पानी-बाइबिल के कथनानुसार-जमीन पर 110 दिन तक और रुका रहा; इसके बाद वह गायब हो गया और नूह अपने जीव-जंतुओं के साथ नाव से बाहर आया, ताकि बियावान धरती को फिर से बना सके।

इस कथा के बारे में हम दो प्रश्न रखते हैं:

- 1) ऐसी वर्षा संभव थी या नहीं, जो सारी पृथ्वी और ऊँचे से ऊँचे पर्वतों को डूबा सके?
- 2) नूह को नौका में सभी जल-जीवियों के एक-एक जोड़े घोट सकते थे या नहीं?

19. बाढ़ संभव थी या नहीं, दोनों ही प्रश्नों का उत्तर गणित की सहायता से दिया जा सकता है।

ऐसी बाढ़ लाने वाली वर्षा के लिये इतना पानी कहाँ से आ सकता है? सिर्फ वातावरण में। वह पानी इसके बाद कहाँ गया? विश्व-प्रलय के इतने पानी को जमीन नहीं सोख सकती। पर हमारे ग्रह से वह बाहर भी नहीं जा सकता। एकमात्र स्थान, जहाँ पानी वापस लौट सकता है, वातावरण है: प्रलय-जल वाष्प बन कर पृथ्वी के वातावरण में ही विलीन हो सकता था। उस पानी को ध्रुव भी वातावरण में ही होना चाहिये। इसका अर्थ है कि हवा में उपस्थित सारा जलवाष्प यदि जम कर पुनः वर्षा का पानी बन जाये, तो एक बार फिर से वैसा ही प्रलय हो जायेगा; विश्व के ऊँचे से ऊँचे पर्वत-शिखर भी फिर से डूब जायेंगे। देखें, यह सही है, या नहीं।

मौसम-विज्ञान के सूचना-कोष से ज्ञात करें कि पृथ्वी के वातावरण में कितनी मात्रता उपस्थित है। ज्ञात होता है कि एक वर्ग-मीटर छाघार वाले वायु-स्तंभ में औसतन 16 कि० ग्रा० के लगभग जलवाष्प होता है। उसकी मात्रा 25 कि० ग्रा० से अधिक कभी नहीं होती। अब

हिस्साब करें कि यदि यह जलवाष्प जम कर वर्षा के रूप में पृथ्वी पर गिरे, तो पानी की कितनी मोटी परत बनेगी। 25 कि० घा०, अर्थात् 25,000 ग्राम पानी का आयतन 25,000 घन सें० मी० होता है। यह आयतन उस परत का होगा, जिसके आधार का क्षेत्रफल 1 वर्ग मीटर या $100 \times 100 = 10,000$ वर्ग सें० मी० है। आयतन में आधार के क्षेत्रफल से भाग दे कर परत की मूटाई (ऊँचाई)

$$25000 : 10,000 = 2.5 \text{ सें० मी०}$$

ज्ञात करते हैं।

2.5 सें० मी० से अधिक बाढ़ नहीं उठ सकती होगी, क्योंकि वातावरण में इससे अधिक पानी नहीं होता।* और पानी की यह ऊँचाई भी तब हो सकती है, जब वर्षा का पानी जमीन में बिल्कुल नहीं सोखा जाये।

यदि कोई प्रलय सचमुच हुआ था, तो हमारा परिकलन दिखाता है कि पानी की परत की मूटाई उस समय कितनी रही होगी: 2.5 सें० मी०। उच्चतम पर्वत-शिखर एवरेस्ट से, जिसकी ऊँचाई 9 कि० मी० है, यह बहुत दूर है। बाढ़ के पानी की ऊँचाई वाइबिल की कथा में ठीक 360,000 गुना बड़ा कर बताया गया है।

इस प्रकार, यदि "प्रलय" के लिये पूरी दुनिया में वर्षा हुई भी थी, तो यह अधिक शक्तिशाली वर्षा नहीं थी, क्योंकि 40 दिन और 40 रात में सिर्फ 25 मि० मी० (चौबिस घंटों में साढ़े मि० मी० से भी कम) अवसादन हुआ था। पतझड़ के समय की एक हल्की वर्षा भी चौबिस घंटों में इससे 20 गुना अधिक पानी देती है।

100. क्या नूह की नौका संभव है? अब दूसरे प्रश्न का अवलोकन करें: क्या नूह की नौका में सभी थल-जीवों घोंट सकते थे?

* दुनिया में कई जगहें ऐसी भी हैं, जहाँ एक बार में 2.5 सें० मी० से भी अधिक अवसादन होता है। पर यह स्थानीय हवा से नहीं, बल्कि समीपवर्ती स्थानों की हवा के साथ लायी गई आर्द्रता से होता है। "विश्व-प्रलय" एक ही साथ सारी दुनिया में गुरु हुआ था, अतः कहीं दूसरी जगह से आर्द्रता आने का कोई प्रश्न नहीं उठता।

नौका में रहने लायक स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। बाइबिल की कथा के अनुसार नौका त्रिभुजा थी। उनमें से हरेक भुजा 300 हाथ लंबी और 50 हाथ चौड़ी थी। "हाथ" प्राचीन पाश्चात्य एशिया-वासियों के लिये लंबाई नापने की इकाई था, जो लगभग 45 से० मी० या 0.45 मीटर के बराबर होती है। अतः नौका की प्रत्येक भुजा के परिमाण हमारी इकाइयों में इस प्रकार थे:

$$\begin{aligned} \text{लंबाई} & 300 \times 0.45 = 135 \text{ मीटर} \\ \text{चौड़ाई} & 50 \times 0.45 = 22.5 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

फल का क्षेत्रफल: $135 \times 22.5 \approx 3040$ वर्ग मीटर.

अतः तीनों भुजाओं को मिला कर रहने की जगह का क्षेत्रफल था:

$$3040 \times 3 = 9120 \text{ वर्ग मीटर।}$$

इतना स्थान क्या दुनिया के सभी स्तनपायी जीवों के लिये भी काफी रहेगा? विभिन्न थल-जीवी स्तनपायी जीवों की संख्या लगभग 3500 है। नूह को सिर्फ जीवों के लिये ही नहीं, बल्कि 150 दिन लंबे प्रलय-काल के दरमियान उनके खाने की सामग्री के लिये भी जगह चाहिये थी। हिंसक पशुओं को अपने लिये भी जगह चाहिये थी और दूसरे पशुओं के लिए भी, जिन्हें वे खाते हैं। फिर इन पशुओं के लिये भी खाने की सामग्री चाहिये! नौका में हर जोड़े जीव के लिये सिर्फ

$$9120 : 3500 = 2.6 \text{ वर्ग मीटर}$$

ही जगह बचती थी।

निवास स्थान का यह "कोटा" स्पष्टतः अपर्याप्त है, खास कर उस हानत में, जब कुछ जगह नूह के बहुसंख्यी परिवार के लिये भी चाहिये थी। इसके अतिरिक्त, पिंजड़ों के बीच आने-जाने के रास्ते के लिये भी कुछ जगह रखनी थी।

लेकिन स्तनपाइयों के अतिरिक्त और भी तो कई जीव हैं, जो पाकार में बड़े नहीं होते, पर प्रकार में बहुत हैं। उनकी लगभग की संख्या इस प्रकार है:

चिड़िये	13 000
सरीसृप	3 500
जलचली	1 400
मकोड़े	16 000
कीड़े-पतंगे	360 000

यदि सिर्फ स्तनपाइयों के लिये जगह पर्याप्त नहीं थी, तो इतने और जीवों के लिये जगह बचने का प्रश्न ही नहीं उठता। इन सारे थल-जीवियों को बचाने के लिये नूह की नौका कई गुनी बड़ी होनी चाहिये थी। वैसे, बाइबिल में बताये गये आकार के अनुसार नूह की नौका पूरा जहाज हो थी : नाविकों के शब्दों में, उसकी जल-विस्थापन की शक्ति 20 000 टन थी। यह बिल्कुल आश्चर्यजनक है कि उस पुराने जमाने में, जब नौका-निर्माण की कला का सिर्फ जन्म हुआ था, लोग इस आकार का जहाज बना सकते थे। इसके बावजूद भी वह इतना बड़ा नहीं था कि वह बाइबिल की कथा में वर्णित काम में आ सकता। इसके लिये पूरा चिड़ियाघर चाहिये था, जिसमें 5 महीनों की भोजन सामग्री संचित हो।

तात्पर्य यह है कि विश्व-प्रलय के बारे में बाइबिल की कथा का गणितीय परिकलनों के साथ इतना भी मेल नहीं बैठता कि उसमें सत्य का कम से कम एक कण भी ढूँढा जा सके। संभावना यही है कि इस कथा का आधार कोई स्थानीय बाढ़ है और बाकी सब कुछ पूर्वी कल्पना-शक्ति की उर्वरता का परिणाम है।

तीस मिले-जुले प्रश्न

घासा है कि इस पुस्तक के साथ पाठक का परिचय निरर्थक नहीं रहा। इससे उसका कोरा मनोरंजन ही नहीं, कुछ लाभ भी हुआ होगा। कुशाग्रता व प्रत्युत्पन्नमतिरत्व का विकास करना तथा ज्ञान के उपयोग में कुशलता प्राप्त कराना ही इस पुस्तक का अर्थ था। पाठक शायद अब अपनी बुद्धिमत्ता की परीक्षा लेना चाहता है। इसके लिये यहाँ तीस विभिन्न प्रकार के प्रश्न दिये जा रहे हैं।

101. जंजीर. लोहार के पास जंजीर की पाँच टुकड़ियाँ जोड़ने के लिये लामो सर्पी। प्रत्येक में तीन कड़ियाँ थीं।

काम शुरू करने के पहले लोहार सोचने लगा : कितनी कड़ियों को खोलना चाहिये कि जंजीर फिर से पूरी जोड़ी जा सके। सोच-विचार कर उसने निश्चय किया कि चार कड़ियाँ खोलनी पड़ेंगी।

क्या कुछ कम कड़ियों को खोलने से काम नहीं चलेगा ?

102. मकड़े और मुंगरे. एक बच्चे ने डिब्बी में कुछ मकड़ों और मुंगरों को पकड़ कर रखा, जिनकी कुल संख्या 8 थी। यदि उनके पैरों की गिनती की जाये, तो कुल 54 पैर होते हैं।

कितने मकड़े और कितने मुंगरे डिब्बी में थे ?

103. टोप, बरसाती और जूते. किसी ने एक टोप, एक बरसाती और एक जोड़े जूते खरीदे। इसके लिये उसे 20 रुबल देने पड़े। बरसाती टोप से 9 रुबल अधिक कीमती है, टोप और बरसाती दोनों की सम्मिलित कीमत जूतों की कीमत से 16 रुबल अधिक होती है। इनमें से प्रत्येक वस्तु की अलग-अलग कीमत बतायें।



चित्र 91. सिक्की की पाँच टुकड़ियाँ।

प्रश्न मुखबानी हल करता है; समीकरणों की मदद से नहीं।

104. मुर्गी घोर बत्ख के घंटे. घंटों की टोकरियाँ रखी है। कुछ में मुर्गियों के घंटे हैं और कुछ में बत्खों के। उनकी संख्याएँ हैं— 5,6,12,14,23 और 29। “यदि मैं इस टोकरी को बेच दूँ,— दुकानदार सोचता है,—तो मेरे पास बत्ख के घंटों से तुम्हें मुर्गी के घंटे बच जायेंगे”।

दुकानदार किस टोकरी के बारे में सोच रहा था?

105. उड़ान. शहर A से शहर B तक उड़ने में हवाई जहाज को 1 घंटा 20 मिनट लगते हैं। पर वापस उड़ने में उसे सिर्फ 80 मिनट लगते हैं। क्या कारण है इसका?

106. पैसों का उपहार. एक पिता ने अपने पुत्र को 150 रुबल दिये। दूसरे ने अपने बेटे को 100 रुबल दिये। पता चला कि दोनों बेटों की सम्मिलित पूँजी में सिर्फ 150 रुबल की वृद्धि हुई है। यह कैसे?

107. दो गोदियाँ. खाली ड्राफ्ट्स* के घरों में एक सफेद और एक खाली गोदियाँ रखनी है। कितने प्रकार से उनकी स्थितियाँ बदली जा सकती हैं?

108. दो घंटों से. दो घंटों की मदद से कौन सी न्यूनतम पूर्ण संख्या सिध्द जा सकती है?

109. इकाई. सभी दस घंटों की मदद से संख्या 1 को व्यक्त करें।

* ड्राफ्ट्स बतारंग के तख्ते पर ही खेलते हैं। फर्क इतना है कि ड्राफ्ट्स की गोदियाँ सिर्फ काले घरों पर रखते हैं। सफेद घर बेकार होते हैं।

110. पाँच गहनों से. पाँच गहनों की मदद से संख्या 10 को व्यक्त करता है। कम से कम दो विधियाँ बताएँ।

111. सभी दस धंकों से. सभी दस धंकों का प्रयोग करते हुए संख्या 100 को व्यक्त करें। कितनी तरह से प्राप्त यह कर सकते हैं? कम से कम चार विधियाँ ही इसके लिये।

112. चार तरीकों से. किन्हीं पाँच समान धंकों का प्रयोग कर चार तरीकों से संख्या 100 को व्यक्त करें।

113. चार इकाइयों से. चार बार एक का प्रयोग कर कौन सी अधिकतम संख्या लिख सकते हैं?

114. रहस्यमय विभाजन. भाग के निम्न उदाहरण में सभी धंकों की जगह तारक-चिन्ह लगे हैं; सिर्फ चार चीजे बचे हैं। तारों की जगह लुप्त धंकों को लिखें।

$$\begin{array}{r}
 \text{*****}4 \quad \text{***} \\
 - \quad \text{***} \quad \text{---} \\
 \hline
 \text{**}4^* \\
 - \quad \text{****} \\
 \hline
 \text{****} \\
 - \quad *4^* \\
 \hline
 \text{****} \\
 - \quad \text{****} \\
 \hline
 \text{****}
 \end{array}$$

इस प्रश्न के कई हल हो सकते हैं।

115. एक प्रीर विभाजन. निम्न उदाहरण में भी लुप्त धंकों को ढूँढना है। इसमें सिर्फ सात सत्ते बचे हैं:

$$\begin{array}{r}
 \text{**}7\text{*****} \quad \text{*****}7^* \\
 \text{*****} \quad \text{---} \\
 \hline
 \text{*****}7^* \\
 - \quad \text{*****} \\
 \hline
 *7^***** \\
 - \quad *7^***** \\
 \hline
 \text{*****} \\
 - \quad \text{*****}7^* \\
 \hline
 \text{*****} \\
 - \quad \text{*****}
 \end{array}$$



चित्र 93. इस घायस को भागों में बाँटना है।

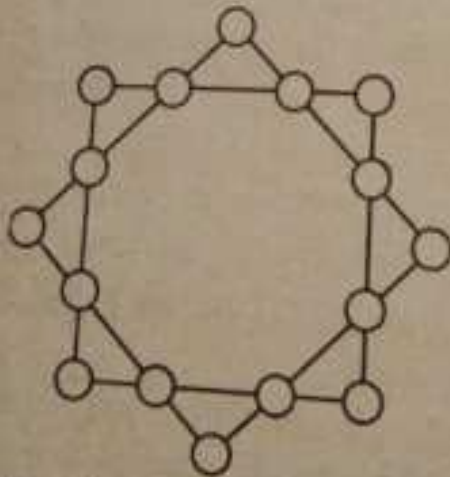
रेखाओं के बीच यह एकमात्र पथ नहीं है। समान लंबाई के घौर कितने पथ प्राप्त किए जा सकते हैं?

121. घड़ी का घायस. इस घायस को (चित्र 93) किसी भी प्रकार के छः भागों में बाँटना है। धर्त यह है कि हर भाग में संख्याओं का योग समान हो। प्रश्न का लक्ष्य यह परखना नहीं है कि घाय कितने समसदार है, बल्कि यह देखना है कि घाय कितनी जल्दी समझ लेते हैं।

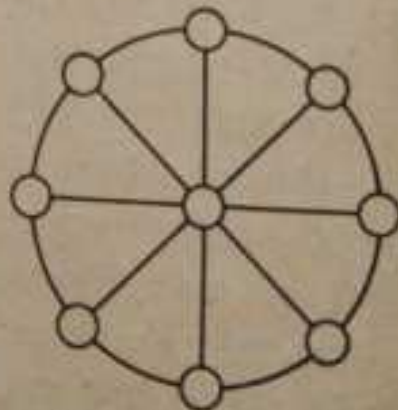
122. अष्टकोण सितारा. चित्र 94 की आकृति में रेखाओं की कटान-बिंदुओं पर 1 से 16 तक की संख्याओं को इस प्रकार लिखना है कि हर वर्ग की हर भुजा पर संख्याओं का योग 34 हो। हर वर्ग के शीर्षों की संख्याओं का योग भी 34 होना चाहिये।

123. संख्या-चक्र. 1 से 9 तक की संख्याओं को चित्र 95 की आकृति में इस प्रकार लिखना है कि एक संख्या केंद्र में हो और अन्य संख्याएँ व्यासों के किनारों पर हों। प्रत्येक कतार की तीनों संख्याओं का योग 15 होना चाहिये।

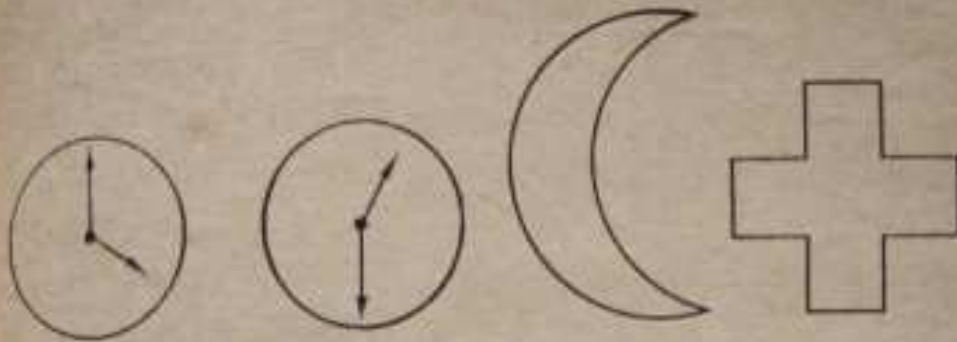
124. तिपाई. लोग कहते हैं कि तिपाई कभी भी हिलती-डुलती नहीं है, चाहे उसके पैरों की लंबाई असमान ही क्यों न हों। क्या यह सच है?



चित्र 94. अष्टकोण सितारा।



चित्र 95. संख्या-चक्र



चित्र 96. सूइयों के बीच कितने डिग्री के कोण हैं?

चित्र 97. चंद्र-हंसिया को सलीब में कैसे "परिणत करें?"

125. कोणों की मात्राएँ. चित्र 96 की घड़ियों में सूइयों के बीच कितने डिग्री के कोण हैं? उत्तर कोण-मापी चांद की मदद से नहीं, बल्कि तर्क से देना है।

126. भूमध्यरेखा पर. यदि हम भूमध्य रेखा पर पृथ्वी के चारों ओर घूम आये, तो तलुओं के बिंदुओं की अपेक्षा हमारे सर का शीर्ष पश्चिम लंबा रास्ता तय करेगा। दोनों के पथों का अंतर बतायें।

127. छे कतारों में. आपने शायद यह मजाकिया कहानी सुनी हो: नौ घोड़ों को दस नावों के पास इस प्रकार खड़ा किया गया कि हर नाव के सामने एक घोड़ा खड़ा हो। अभी जो प्रश्न हम प्रस्तुत कर रहे हैं, वास्तव रूप से इस विख्यात कहानी जैसा ही है, पर इसका हल काल्पनिक नहीं, बल्कि यथार्थ है। प्रश्न इस प्रकार है:

24 व्यक्तियों को 6 कतारों में इस प्रकार खड़ा करना है कि हर कतार में 5 व्यक्ति हों।

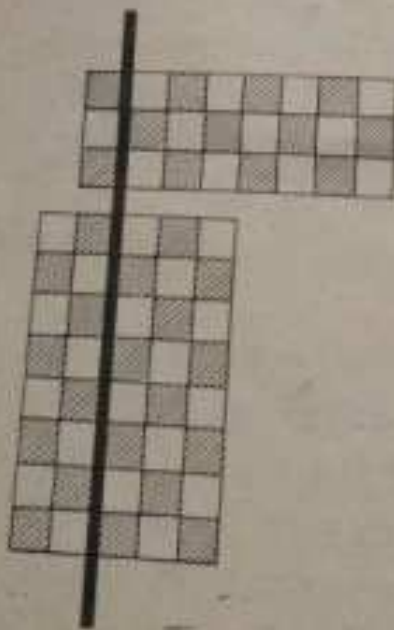
128. क्रॉस और अर्द्ध-चंद्र. चित्र 97 में अर्द्ध-चंद्र की आकृति दिखायी गयी है (सब पूछें तो यह अर्द्ध-चंद्र नहीं, बल्कि चंद्र-हंसिया है, क्योंकि अर्द्ध-चंद्र अर्द्ध-वृत्त के आकार का होता है)। यह दो वृत्तों के चापों से बना है। रेड-क्रॉस का एक चिह्न बनाना है, जिसका क्षेत्रफल ज्यामिति के अनुसार ठीक अर्द्ध-चंद्र के क्षेत्रफल के बराबर हो।

129. घन और काट. आपके पास एक घन है, जिसका हर किनारा 3 से० मी० लंबा है। उसका आयतन 27 घन से० मी० होगा और उसे 27 नन्हे घनों में काटा जा सकता है, जिसमें से हरेक का किनारा 1 से० मी० लंबा होगा। घन को छः समतलों पर काट कर



चित्र 98. किसी एक फलक के समानांतर दो समतल खींचने होंगे। . . .

प्रकार रख सकते हैं कि उन्हें काटने वाला घनता समतल दोनों भागों से पूरा-पूरा गुजर सके। घन को 27 नन्हें घनों में काटने वाले समतलों की संख्या इस अतिरिक्त संभावना की मदद से आप कम कर सकते हैं या नहीं?



चित्र 99. अगली कटान डालने के पहले टुकड़ों को एक-दूसरे पर रख सकते हैं।

यह कार्य सरलतापूर्वक किया जा सकता है: दो समतल एक-दूसरे के समानांतर होंगे, दो दूसरे के और दो तीसरे के समानांतर होंगे। अब कल्पना कीजिये कि आपको हर काट के बाद घन के भागों को व्योम में स्थिरकाने की अनुमति मिल नहीं है: कोई भाग काटने के बाद आप उसे दूसरे पर इस

130. एक छीर कटान. यह प्रश्न पिछले से मिलता-जुलता है, पर कुछ भिन्न है। साधारण अंतरज-घट्ट को, जिसमें 64 नन्हें वर्ग (8×8) होते हैं, अलग-अलग वर्गों में काटना है। आपको सिर्फ सीधी रेखाओं पर काटने की अनुमति है। लेकिन हर कटान के बाद आप टुकड़ों को एक-दूसरे पर इस प्रकार रख सकते हैं कि अगली सीधी कटान से एक नहीं, बल्कि कई टुकड़े एक साथ कट जायें। पूरे पट्टे को अलग-अलग 64 वर्गों में काटने के लिये आपको कितनी सीधी कटानें लगानी होंगी?

101—130 पहेलियों के उत्तर

101. यह काम सिर्फ तीन कड़ियों को खोल कर किया जा सकता है। इसके लिये एक टुकड़ी की तीनों कड़ियों को खोल कर उनसे अन्य टुकड़ियों के सिरों को मिलाना होगा।

102. इस प्रश्न को हल करने के लिये आपको जीव-विज्ञान की कुछ बातें याद करनी होंगी : मुंगरे के 6 पैर होते हैं और मकड़े के 8।

यह बात करने के बाद मान लें कि डिब्बी में सिर्फ 8 मुंगरे हैं। सभी पैरों की संख्या $6 \times 8 = 48$ होगी। प्रश्न की शर्त के अनुसार यह 6 कम है। अब एक मुंगरे को हटा कर उसकी जगह एक मकड़े को रख दें। इससे पैरों की संख्या पहले से दो अधिक हो जायेगी, क्योंकि मकड़े के छः नहीं, बल्कि 8 पैर होते हैं।

स्पष्ट है कि यदि इस प्रकार दो और मुंगरों को बदल दिया जाये, तो हम पैरों की कुल संख्या 54 तक बढ़ा सकते हैं। इस हालत में 8 मुंगरों में से सिर्फ 5 बच जायेंगे और बाकी मकड़े होंगे।

अतः डिब्बी में 5 मुंगरे और 3 मकड़े थे।

उत्तर जाना जाय : 5 मुंगरों के 30 पैर हुए और 3 मकड़ों के — 24 पैर। कुल होते हैं $30 + 24 = 54$, जो प्रश्न की शर्त को पूरा करता है।

इस प्रश्न को दूसरे तरीके से भी हल किया जा सकता है। मान लें कि डिब्बी में सिर्फ मकड़े हैं ; उनकी संख्या 8 है। पैरों की कुल संख्या $8 \times 8 = 64$ होगी। यह प्रश्न की शर्त में बतायी गयी संख्या से 10 अधिक है। एक मकड़े को हटा कर उसकी जगह एक मुंगरे को रखने पर पैरों की संख्या 2 कम हो जायेगी। अतः पाँच मकड़ों को हटा कर उनकी जगह पाँच मुंगरे रखने चाहिये, ताकि पैरों की संख्या घट कर 54 हो जाये। दूसरे जब्दों में, 8 मकड़ों में से सिर्फ 3 रहने दें और बाकी को मुंगरों से बदल दें।

103. यदि बरसाती, टोप और जूतों की जगह सिर्फ दो जोड़े जूते बरसते मचे होते, तो 20 खर्च नहीं, बल्कि कुछ कम खर्च देने पड़ते — उतना कम, जितना जूते मचे हैं बरसाती और टोप में, यर्थात् 16 खर्च देने पड़ेंगे। इससे ज्ञात होता है कि दो जोड़े जूतों की कीमत

20—16—4 स्वल्प है। घतः एक जोड़े जूते की कीमत 2 स्वल्प है।
 यह स्पष्ट है कि बरसाती घोर टोप की सम्मिलित कीमत 20—2—18
 स्वल्प है। पर बरसाती टोप से 9 स्वल्प अधिक महंगा है। पहले
 के विचार-कम का अनुसरण करें: बरसाती घोर टोप की बजाय दो
 टोप खरीदें। इसके लिए हम 18 स्वल्प नहीं, बल्कि 9 स्वल्प कम
 खर्चे करेंगे। घतः दो टोपों की कीमत 18—9—9 स्वल्प है; एक
 टोप की कीमत 4 स्वल्प 50 कोपेक हुई।

इस प्रकार, वस्तुओं की कीमत निम्न है: जूते—2 स्वल्प, टोप—
 4 स्वल्प 50 कोपेक, बरसाती—13 स्वल्प 50 कोपेक।

104. दुकानदार 29 घंटों वाली टोकरियों के बारे में सोच रहा था।
 23, 12 और 5 घंटों वाली टोकरियों में मूर्तियों के घंटे ये घोर वस्तुओं
 के घंटे—14 और 6 घंटों वाली टोकरियों में।

उत्तर ज्ञाते। मूर्तियों के कुल घंटे बचते हैं:

$$23 + 12 + 5 = 40$$

घोर वस्तुओं के

$$14 + 6 = 20$$

वस्तुओं के घंटों से मूर्तियों के घंटे दुगुने हैं, जो शर्त के अनुसार
 है।

105. इस प्रश्न में समझाने के लिये कुछ भी नहीं बचता है:
 हवाई जहाज को घाने और जाने में एक ही समय लगता है, क्योंकि
 80 मिनट—1 घं० 20 मि०।

प्रश्न धन्य-मनस्क पाठक के लिये है जो सोचता है कि 1 घं०
 20 मि० और 80 मि० के बीच कोई फर्क है। आश्चर्यजनक बात है कि
 इस फेरे में बहुत से लोग फँस जाते हैं, और उनमें अधिकतर लोग
 ऐसे होते हैं, जिन्हें जोड़-घटाव करने की यादत अधिक है। इसका
 कारण यह है कि लोग मुद्रा-इकाइयों और माप की दशमलव-प्रणाली
 के प्राचीन हो गये हैं। हम जाने-अनजाने उनकी तुलना 1 स्वल्प 20
 कोपेक और 80 कोपेक के साथ करने लगते हैं। प्रश्न इसी मनोवै-
 ज्ञानिक भूल पर आधारित है।

106. इस चक्कर का रहस्य यह है कि दो पिताघों में से एक पुत्र है दूसरे का। कुल मिला कर चार नहीं, बल्कि सिर्फ तीन व्यक्ति हैं: पितामह, पिता और पौत्र। पितामह अपने पुत्र को 150 रुबल देता है और वह पौत्र को (अर्थात् अपने पुत्र को) 100 रुबल देता है और इस प्रकार उसकी पूंजी में सिर्फ 50 रुबल की वृद्धि होती है।

107. पहली गोटी को तख्त के 64 घरों में से किसी में रखा जा सकता है, अर्थात् 64 विधियों से रखा जा सकता है। उसे रख लेने के बाद दूसरी गोटी को बाकी 64 घरों में से किसी में रखा जा सकता है। इसका अर्थ है कि पहली गोटी की प्रत्येक स्थिति के साथ दूसरी की 63 स्थितियाँ संलग्न की जा सकती हैं। अतः झण्ट-बोर्ड पर दोनों गोटियों की भिन्न स्थितियों की कुल संख्या

$$64 \times 63 = 4032 \text{ है।}$$

108. दो संकों की सहायता से, जैसा कुछ पाठक शायद सोचते होंगे, सबसे छोटी संख्या 10 नहीं, बल्कि इकाई लिखी जा सकती है। उसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ आदि } \frac{9}{9} \text{ तक।}$$

बीज-गणित से परिचित लोग इसमें निम्न व्यंजनों की कतार जोड़ सकते हैं:

$$1^{\circ}, 2^{\circ}, 3^{\circ}, 4^{\circ} \text{ आदि } 9^{\circ} \text{ तक,}$$

क्योंकि शून्य घात की कोई भी संख्या इकाई के बराबर होती है।*

109. इकाई को दो बिन्दुओं के योग के रूप में व्यक्त करना चाहिये:

$$\frac{148}{206} + \frac{35}{70} = 1.$$

बीज-गणित जानने वाले दूसरे तरह से भी उत्तर दे सकते हैं:

$$123456789^0; \quad 234567^{\circ-9}$$

आदि, क्योंकि शून्य घात की संख्या एक के बराबर होती है।

* $\frac{0}{0}$ या 0^0 सही हल नहीं है, क्योंकि वे अंजन निरर्थक हैं।

110. दो विधियाँ दिखें हैं:

$$9 \frac{90}{99} = 10,$$

$$\frac{90}{9} - \frac{9}{9} = 10.$$

बीज-गणित जतने वाले अन्य उत्तर भी दे सकते हैं, जैसे:

$$\left(9 \frac{9}{9}\right)^2 = 10,$$

$$9 + 99^{9-7} = 19.$$

111. 4 हल किये जा सके हैं:

$$70 + 24 \frac{9}{18} + 5 \frac{3}{6} = 100;$$

$$80 \frac{27}{54} + 19 \frac{3}{6} = 100;$$

$$87 + 9 \frac{4}{3} + 3 \frac{12}{60} = 100;$$

$$50 \frac{1}{2} + 49 \frac{38}{76} = 100.$$

112. पाँच एक तरह के धकों की मदद से संख्या 100 को एक, तीन और पाँच (यादगिरी सबसे सरल होगा) का व्यवहार कर के लिख सकते हैं:

$$111 - 11 = 100;$$

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100;$$

$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100;$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

113. धक्कर उत्तर देते हैं: 1111। पर इससे कई गुनी बड़ी संख्या लिखी जा सकती है—11 का ग्यारहवाँ घात: 11^{11} । यदि धोरज हो, तो वह परिकलन पूरा करें (लघुगणकों की सहायता से ऐसे गुणन शीघ्र संपन्न किये जा सकते हैं)। आपको विश्वास हो जायेगा कि यह 280 बिलियन से भी बड़ी संख्या है। अतः यह 1111 से 250 बिलियन गुना अधिक है।

114. भाग का यह उदाहरण निम्न चार विभिन्न स्थितियों के अनुरूप है:

$$1\ 337\ 174 : 943 = 1\ 418;$$

$$1\ 343\ 784 : 949 = 1\ 416;$$

$$1\ 200\ 474 : 846 = 1\ 419;$$

$$1\ 202\ 464 : 848 = 1\ 418.$$

115. इस प्रश्न को विभाजन का सिर्फ एक उदाहरण संतुष्ट कर सकता है:

$$7\ 375\ 428\ 413 : 125\ 473 = 58\ 781$$

पंतिम दोनों प्रश्न काफी कठिन हैं। उनका प्रथम प्रकाशन अमेरिकन पत्र-पत्रिकाओं में हुआ था: "गणित-सामाचार", 1920 ई० और "स्कूली दुनिया", 1906 ई० में।

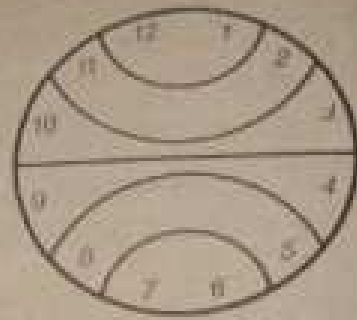
116. एक वर्ग मीटर में एक हजार हजार वर्ग मिलिमीटर होते हैं। प्रत्येक हजार वर्गों को (जिनका आकार मिलिमीटर है) सटा-सटा कर रखने पर 1 मीटर लंबा फीता मिलेगा। एक हजार ऐसे फीतों की लंबाई 1000 मीटर, अर्थात् 1 कि० मी० होगी।

117. उत्तर से घाप ठगे रह जायेंगे: स्तंभ की ऊँचाई 1000 कि० मी० होगी।

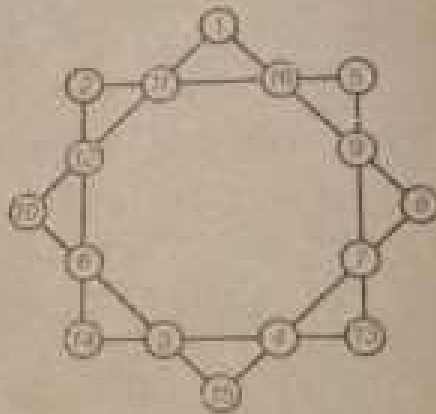
सुझवानी हिसाब करें। एक घन मीटर में हजार × हजार × हजार घन होंगे, जिनका आकार एक मिलिमीटर है। ऐसे एक हजार घनों को एक के ऊपर एक रखने से 1000 मि० मी०, अर्थात् 1 मीटर ऊँचा स्तंभ प्राप्त होगा। पर हमारे पास ऐसे घनों की संख्या एक हजार से हजार × हजार गुना अधिक है। अतः स्तंभ की ऊँचाई 1000 000 मीटर, अर्थात् 1000 कि० मी० होगी।

118. चित्र 100 से स्पष्ट है कि (कोण 1 और 2 की तुल्यता से) वस्तु के रेखिक आकार और उसके तदनुरूप चित्र के रेखिक आकारों का वही अनुपात होगा, जो वीज से वस्तु की दूरी और कैमरे की पार्श्व की अनुपात है। प्रश्न में हवाई जहाज की ऊँचाई को x मीटर मान कर हम निम्न अनुपात प्राप्त करते हैं:

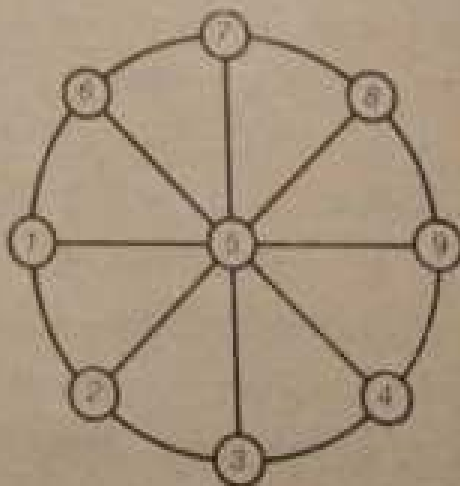
$$12\ 000 : 8 = x : 0.12$$



चित्र 101



चित्र 102



चित्र 103



चित्र 100

यहाँ से $x = 180$ मी० .

119. 89.4 को एक मिलियन, अर्थात् एक हजार हजार से गुणा करना चाहिये। गुणा दो चरणों में करेंगे: 89.4 ग्राम $\times 1000 = 89.4$ कि० ग्रा०, क्योंकि एक किलोग्राम एक ग्राम से हजार गुना अधिक होता है। अब और गुणा करें: 89.4 कि० ग्रा० $\times 1000 = 89.4$ टन, क्योंकि एक टन एक किलोग्राम से हजार गुना अधिक होता है।

घन: इष्ट वजन है: 89.4 टन।

120. A से B तक पहुँचने के लिये सारे पथों की संख्या 70 होगी। (इस प्रश्न का मुडोल हल संचय-सिद्धांत से मिल सकता है, जिसका अध्ययन बीज-गणित में किया जाता है।)

121. चूकि डायल पर की सभी संख्याओं का योग 78 के बराबर है, उसके छः भागों में से प्रत्येक में संख्याओं का योग $78 : 6 = 13$ होना चाहिये। यह ज्ञात कर लेने पर हल सरल हो जाता है, जो चित्र 101 में दिखाया गया है।

122—123. इनके हल क्रमशः चित्र 102 तथा 103 में दिखाये गये हैं।

124. तिपाई के तीनों पैर हर हालत में जमीन छूते हैं, क्योंकि धूम में स्थित किन्हीं तीन बिन्दुओं से एक समतल गुजर सकता है और वह एकमात्र होता है। तिपाई के नहीं हिलने-डुलने का कारण यही है। जैसा प्राप देखते हैं, कारण शुद्ध ज्यामितीय है, भौतिकीय नहीं।

इसीलिये सरल उपकरणों और फोटो-कैमरों के लिये तिपाइयों का उपयोग करना अधिक सुलभ है। चौथा पैर उपकरण को और स्थिर नहीं बना सकता। इसके विपरीत, हरबार कुछ न कुछ करना पड़ता, ताकि उपकरण हिले-डुले नहीं।

125. प्रश्न का उत्तर देना सरल होगा, यदि समझ में आ जाये कि चंद्र की मूड़ियाँ कौन-सा समय दिखा रही हैं। चार्ज वृत्त में (चित्र 96) में स्पष्टतः 7 बजे का समय दिखा रही हैं। घन: सूर्यो के सिरो के बीच का चाप पूर्ण परिधि का $\frac{5}{12}$ -वाँ भाग है। दिशियों में यह होगा:

$$360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ.$$



चित्र 104

समझना कठिन नहीं है कि चारों वृत्त में घूर्णना वाले नौ का समय दिखा रही है। उनके निरों के बीच का चाप पूर्ण परिधि के बारहवें भाग का $3\frac{1}{2}$ भाग, अर्थात् $\frac{7}{24}$ भाग है।
विधियों में यह होगा

$$360^\circ \times \frac{7}{24} = 105^\circ$$

126. धावमी का कद 175 सें० मी० और पृथ्वी की विज्या R मान कर पक्षों का अंतर ज्ञात करें:

$$2 \times 3.14 \times (R + 175) - 2 \times 3.14 \times R = 2 \times 3.14 \times 175 = 1100 \text{ सें० मी०,}$$

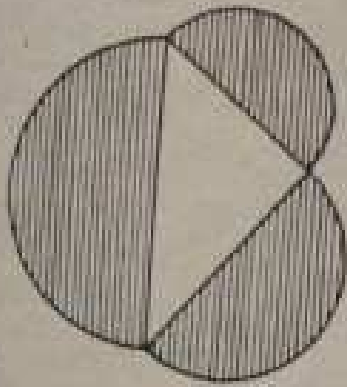
अर्थात् सिर्फ 11 मीटर। सबसे आश्चर्य की बात यह है कि उत्तर गोलों की विज्या पर निर्भर नहीं करता। वह एक मन्हे गोलों और विराट सूर्य पर भी इतना ही होगा।

127. प्रश्न की जल सरलतापूर्वक पूरी हो सकती है, यदि लोगों को षटकोण के आकार में खड़ा किया जाये (चित्र 104)।

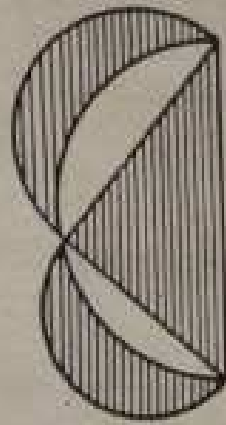
128. जिन पाठकों ने वृत्तीय वर्ग जैसे हलातीय प्रश्न* के बारे में सुना होगा, जायद इस प्रश्न को भी ज्यामितीय विधियों से हलातीय मान लेंगे। यदि पूर्ण वृत्त को बराबर क्षेत्रफल वाले वर्गों में परिवर्तित नहीं किया जा सकता, - बहुत से लोग सोचते हैं, - तो दो वृत्त-चापों से बनी चंद्राकार आकृति को भी समकोण आकृति में नहीं बदला जा सकता है।

पर यह प्रश्न बेशक ज्यामितीय बनावटों से हल हो सकता है, यदि हम पिथागोरस प्रमेय के एक मनोरंजक उपप्रमेय का उपयोग करें। जिस उपप्रमेय की बात मैं कर रहा हूँ, वह इस प्रकार है: समकोण

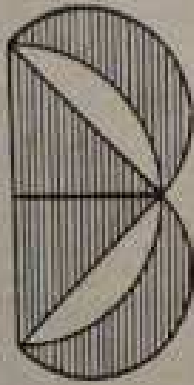
* प्रश्न है: दिये गये वृत्त के बराबर क्षेत्रफल वाले वर्गों को शुद्ध ज्यामितीय विधियों से, अर्थात् पैसिलों, एक परकाल और एक स्केल की मदद से बनाना। इस प्रश्न का हल संभव नहीं है। - प्र०



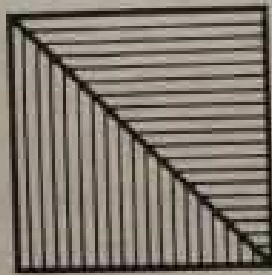
चित्र 105



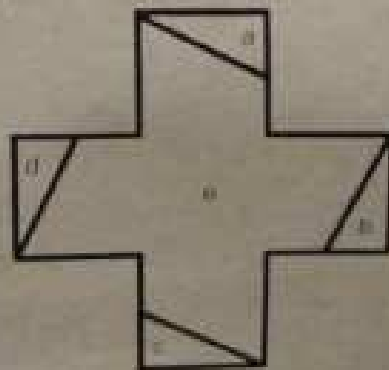
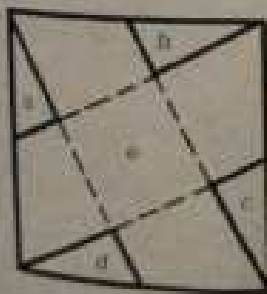
चित्र 106



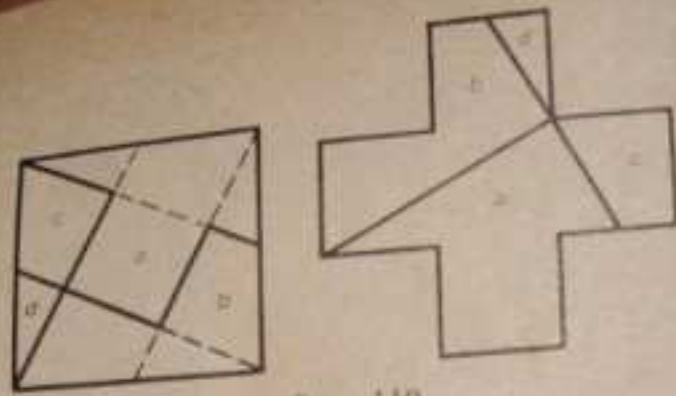
चित्र 107



चित्र 108



चित्र 109



चित्र 110

त्रिभुज में परस्पर संव भुजाओं पर बने धर्ज-वृत्तों के क्षेत्रफलों का योग कर्ण पर बने धर्ज-वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होता है (चित्र 105)। बड़े धर्ज-वृत्त को दूसरी तरफ पलट कर (चित्र 106) हम देखते हैं कि दोनों पंक्तिदार चंद्रों के क्षेत्रफल मिल कर त्रिभुज के क्षेत्रफल के बराबर है।* यदि त्रिभुज समद्विबाहु हो, तो प्रत्येक चंद्र का क्षेत्रफल त्रिभुज के क्षेत्रफल से साधा होगा (चित्र 107)।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि ज्यामितीय विधियों से एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाया जा सकता है, जिसका क्षेत्रफल सही-सही चंद्राकृति के क्षेत्रफल के बराबर हो।

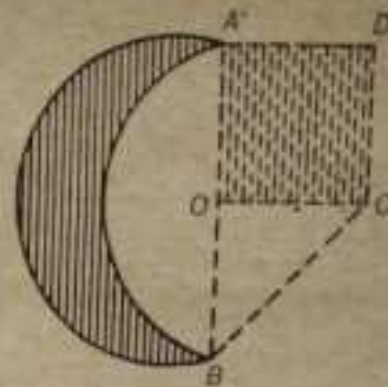
और चूंकि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बराबर क्षेत्रफल वाले वर्ग में परिवर्तित किया जा सकता है (चित्र 108), हमारी चंद्राकृति भी शुद्ध ज्यामितिय बनावट द्वारा बराबर क्षेत्र वाले वर्ग में बदली जा सकती है।

धब रह जाता है इस वर्ग को रेड-क्वैस के चिह्न में परिवर्तित करना (रेड-क्वैस का चिह्न पाँच बराबर वर्गों को आपस में सटा कर बनाते हैं)।

इस बनावट की कई विधियाँ हैं। इनमें से दो चित्र 109 तथा 110 में प्रदर्शित हैं। दोनों ही बनावट वर्ग के शीर्षों को सामने की भुजाओं की मध्य-बिंदुओं से मिला कर शुरू करते हैं।

* ज्यामिति में यह स्थिति "हाइपोक्रैट के चंद्र" नामक प्रमेय से प्रसिद्ध है।

एक महत्वपूर्ण बात: बराबर क्षेत्र वाले रेड-क्रॉस का चिह्न सिर्फ उसी चंद्राकृति से बन सकता है, जो दो वृत्त-भागों से बनी हो: बाह्य वृत्त-भाग घर्द्ध-वृत्त होना चाहिये और आंतरिक वृत्त-भाग तदनुरूप बड़ी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि का चौथाई होना चाहिये।*



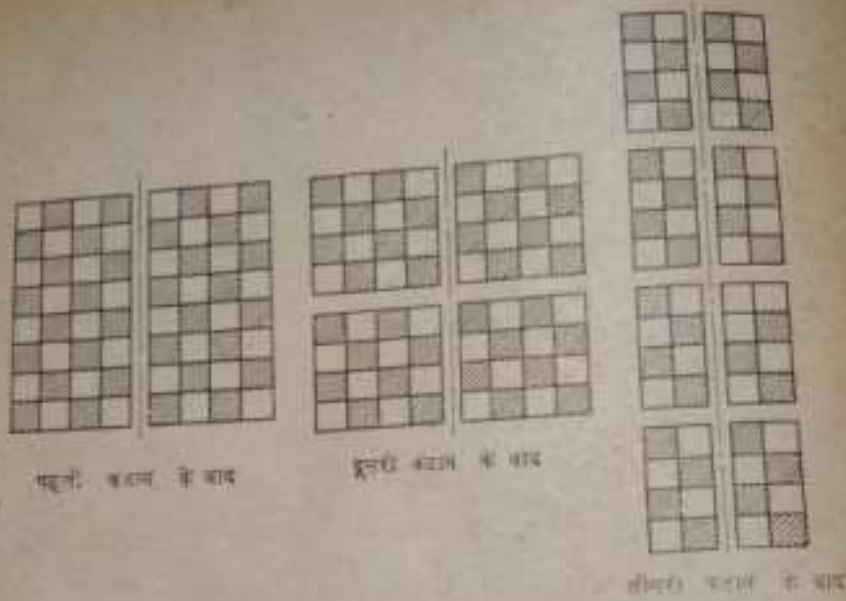
चित्र 111

इस प्रकार, बनावट निम्न प्रकार से संपन्न करते हैं। हसिये के सिरों A और B (चित्र 111) को मिला देते हैं; इस सरल रेखा की मध्य-बिंदु, O पर संब $OC=OA$ डालते हैं। समद्विबाहु त्रिभुज OAC को बढ़ा कर OADC वर्ग बनाते हैं, जिसे चित्र 109 और 110 में दिखायी विधियों से रेड-क्रॉस के चिह्न में परिवर्तित करते हैं।

129. बताया गयी अतिरिक्त संभावना से समस्या आसान नहीं होती: छ: से कम कर्तक (काटने वाले) समतल नहीं हो सकते। बड़े धन के 27 में से प्रत्येक आंतरिक धन के छ: पार्श्व होते हैं और कोई भी कर्तक समतल इस आंतरिक धन के दो फलकों को एक साथ नहीं तराज सकता, चाहे हम टुकड़ों को जितनी भी विधियों से एक दूसरे पर न रखें।

130. पहले देखें कि काटों की न्यूनतम संख्या क्या हो सकती है। यदि हम एक बार काटेंगे, हमें तथ्य के दो भाग मिलेंगे। अगली काट से, यदि वह दोनों भागों को काट सके, हमें चार भाग मिलेंगे। यदि उन्हें इस प्रकार रखा जाये कि सबों को एक साथ काटा जा सके, तो अगली काट से छः भाग प्राप्त होंगे। चौथी काट के बाद 16

* आकाश में दिखने वाले चंद्र-हसिये का आकार कुछ भिन्न होता है: उसका बाह्य भाग घर्द्ध-वृत्त होता है और आंतरिक घर्द्ध-दीर्घवृत्त होता है। चित्रकार अक्सर चंद्र-हसिया सही नहीं बनाते। वे उसे दो वृत्त-भागों से बना हुआ दिखाते हैं।



चित्र 112

टुकड़े मिलेंगे (यदि वह पिछले सभी टुकड़ों को एक साथ काट सके) और पाँचवीं काट के बाद 32 टुकड़े प्राप्त होंगे। अर्थात् पाँचवीं काट के बाद 64 बराबर-बराबर वर्ग नहीं प्राप्त हो सकते। सिर्फ छठी काट के बाद जब टुकड़ों की संख्या दुगुनी हो जायेगी, हम 64 पृथक वर्ग प्राप्त करने की आशा कर सकते हैं। मतलब कि छः काटों से कम में काम नहीं चलेगा।

अब यह दिखा देना है कि छः काटों से सचमुच में टुकड़ों की संख्या दुगुनी हो जायेगी और परिणाम-स्वरूप $2^6=64$ पृथक वर्ग प्राप्त होंगे। यह कठिन नहीं है; इसके लिये निरंतर यह ध्यान रखना होगा कि हर काट के बाद बराबर आकार के टुकड़े मिलें और हर अगली काट प्रत्येक टुकड़े को आधा कर दे। चित्र 112 में तीन काटें दिखायी गयी हैं।

